FONDO PIZZOFALCONE

9 2 c 2

BIBLIOTECA PROVINCIALE
mise f. 7. 66
Armadio XXVI
Palchetto 8
Num° d' ordine 53 1928

NAZIONALE
B. Prov.
II
316
VITT EM III
NAPOLI

Digitized by Google

MÉMOIRE

SUR

LES TRANSCENDANTES ELLIPTIQUES,

Où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes, qui comprennent les arcs d'ellipse, et qui se rencontrent fréquemment dans les applications du calcul intégral.

Lu à la ci-devant Académie des Sciences en avril 1792.

PAR ADRIEN-MARIE LE GENDRE.

A PARIS,

Chez { le C. DU PONT, Imprimeur-Libraire, rue de la Loi, N°. 14.
le C. FIRMIN DIDOT, Libraire rue Thionville.

L'AN DEUXIÈME DE LA RÉPUBLIQUE,

MÉMOIRE

SUR

LES TRANSCENDANTES

ELLIPTIQUES.

Par ADRIEN-MARIE LE GENDRE.

Un grand nombre d'intégrales peuvent se déterminer par le seul secours des arcs de cercle et des logarithmes, qui sont les plus simples des quantités transcendantes; mais pour étendre les applications du calcul intégral, il faut nécessairement avoir recours à des transcendantes plus composées. C'est en examinant avec soin la nature et les propriétés de ces transcendantes, ou moins de celles dont l'usage est le plus fréquent, qu'on parviendra à simplifier considérablement les résultats de la théorie, et à en rendre l'usage commode pour la pratique.

Les arcs d'ellipse sont, après les arcs de cercle et les logarithmes, une des transcendantes les plus simples, et dont on pourroit faire en quelque sorte un nouvel instrument de calcul, si une fois on s'étoit familiarisé avec leurs propriétés, et que l'on eût des moyens faciles de les évaluer avec précision. C'est sur quoi nous avons proposé quelques vues nouvelles dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1786.

Mais si les arcs d'ellipse ajoutent beaucoup aux moyens de l'analyse, sur-tout depuis qu'on a remarqué que les arcs

d'hyperbole s'en déduisent aisément, ils sont cependant insuffisans pour résoudre des questions d'ailleurs peu compliquées, telles que la surface du cône oblique, le mouvement de rotation d'un corps qui n'est sollicité par aucune force accélératrice, etc. Ces questions, et une infinité d'autres, dépendent en général de l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{R}$ dans laquelle P est une fonction rationnelle de x, et R un radical de la forme $\sqrt{(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$, α, 6, γ, etc., étant constans. Or, en examinant avec attention la nature de cette intégrale, on trouve qu'elle offre trois espèces distinctes de transcendantes. La première et la seconde peuvent être exprimées par des arcs d'ellipse; la troisième est plus composée: mais elle a tant d'analogie avec les deux autres, qu'on peut les regarder toutes trois comme ne formant qu'un même ordre de transcendantes, le premier après les arcs de cercle et les logarithmes.

Les deux premières espèces auroient pu se confondre en une seule, puisqu'elles sont exprimables par des arcs d'ellipse; cependant nous avons cru devoir les distinguer, attendu que ce que nous appellons la première espèce peut bien se déterminer par la seconde, mais non pas la seconde par la première; d'où il paroît que la première espèce, considérée analytiquement, est plus simple que l'autre, et qu'ainsi les arcs d'ellipse ne sont pas la transcendante la plus simple qu'on rencontre après les arcs de cercle et les logarithmes. Au reste, les rapports sont tels entre les trois sortes de transcendantes dont il s'agit, que nous avons cru devoir leur donner la dénomination commune de *Transcendantes elliptiques*.

Nous nous proposons dans ce Mémoire de développer la nature et les propriétés de cet ordre de transcendantes, de manière à en rendre l'usage facile dans les applications du calcul intégral. Plusieurs des méthodes et des résultats que nous allons exposer, sont déja connus des géomètres:

nous avons réuni sous un même point de vue tout ce qui a été publié jusqu'à présent sur cette théorie ; mais nous avons tâché en même temps d'y ajouter de nouveaux degrés de perfection.

Idée générale des différentes sortes de transcendantes contenues dans la formule intégrale $\int \frac{P\,dx}{R}$.

(1) Nous représentons par P une fonction rationnelle quelconque de x, et par R le radical $\sqrt{(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}$: ce radical restant le même, on peut donner une infinité de valeurs à P ; mais il n'en résulte pas pour cela une infinité de transcendantes de nature différente. On peut toujours par des intégrations partielles, réduire l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{R}$ à une partie algébrique, plus un certain nombre de transcendantes, qui sont toujours de la même forme et de la même nature. C'est ce qu'il s'agit de développer.

Supposons d'abord que P soit une fonction entière de x, ensorte qu'on ait $P = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^k$. Si on représente, pour abréger, l'intégrale $\int \frac{x^m\,dx}{R}$ par Π^m, il est clair qu'on aura

$$\int \frac{P\,dx}{R} = A\Pi^0 + B\Pi^1 + C\Pi^2 + \ldots + K\Pi^k :$$

or, en différentiant la quantité $x^{m-3}R$, et revenant de la différentielle à l'intégrale, on trouve cette formule :

$$x^{m-3}R = (m-3)\alpha\Pi^{m-4} + (m-\tfrac{5}{2})6\Pi^{m-3} + (m-2)\gamma\Pi^{m-2} + (m-\tfrac{3}{2})\delta\Pi^{m-1} + (m-1)\varepsilon\Pi^m ;$$

d'où il suit que Π^m, Π^{m-1}, etc. peuvent s'abaisser succes-

sivement à des degrés inférieurs, et qu'on peut continuer la réduction jusqu'à ce qu'on n'ait que des quantités au-dessous de Π^3 ; car la réduction de Π^3 est encore possible, parce que dans le cas de $m = 3$, le terme qui sembleroit devoir contenir Π^{-1} s'évanouit. Donc P étant une fonction entière de x, l'intégrale $\int \frac{P dx}{R}$ pourra toujours se réduire à une quantité algébrique, plus une transcendante qui sera constamment de la forme

$$\int (A + Bx + Cx^2) \frac{dx}{R}.$$

(2). Considérons maintenant la formule dans toute sa généralité, et soit P une fonction rationelle quelconque de x : on fera comme s'il étoit question d'intégrer la fraction rationelle $P dx$; on extraira d'abord la partie entière qui peut y être contenue, et cette partie sera traitée comme il vient d'être dit. On décomposera ensuite le reste en plusieurs fractions partielles, selon le nombre des facteurs du dénominateur ; de-là résulteront autant de termes dans l'intégrale totale, et chacun de ces termes pourra être représenté par l'expression générale $N \int \frac{dx}{(1+nx)^k R}$. Or, il est facile de réduire tous les termes de cette espèce à des termes semblables, où $k = 1$, c'est ce que nous allons prouver dans un instant. Observons auparavant que si le dénominateur, au lieu d'être complexe, étoit simplement x^k, l'intégrale $\int \frac{dx}{x^k R}$, et toutes les semblables où $k > 1$, pourroient se déterminer par le moyen de l'intégrale $\int (\frac{A}{x} + B + Cx + Dx^2) \frac{dx}{R}$; il suffiroit pour cela de donner à $m - 4$ des valeurs négatives dans la formule de l'article 1.

Revenons au terme général $\int \frac{dx}{(1+nx)^k R}$ que nous appellerons Γ^k. Si on fait $1 + nx = \omega$, et qu'on prenne les

coëfficiens α', $6'$, etc., de manière qu'on ait l'équation identique

$$\alpha + 6\left(\frac{\omega-1}{n}\right) + \gamma\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^2 + \delta\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^3 + \varepsilon\left(\frac{\omega-1}{n}\right)^4 = \alpha' + 6'\omega + \gamma'\omega^2 + \delta'\omega^3 + \varepsilon'\omega^4,$$

on trouvera par la différentiation de la quantité $\omega^{-k+1}\mathrm{R}$, cette formule générale :

$$\frac{-\mathrm{R}}{n(1+nx)^{k-1}} = (k-1)\alpha'\Gamma^k + (k-\tfrac{3}{2})6'\Gamma^{k-1} + (k-2)\gamma'\Gamma^{k-2} + (k-\tfrac{5}{2})\delta'\Gamma^{k-3} + (k-3)\varepsilon'\Gamma^{k-4}.$$

D'où il suit que les quantités Γ^2, Γ^3, etc., peuvent se déterminer au moyen de Γ^1, Γ^0, Γ^{-1}, Γ^{-2}; or, $\Gamma^0 = \int \frac{dx}{\mathrm{R}}$, $\Gamma^{-1} = \int (1+nx)\frac{dx}{\mathrm{R}}$, $\Gamma^{-2} = \int (1+nx)^2 \frac{dx}{\mathrm{R}}$. Donc en général la formule $\int \frac{dx}{(1+nx)^k \mathrm{R}}$ et toutes les formules semblables dans lesquelles k est plus grand que l'unité, se réduiront toujours à une partie algébrique, plus une intégrale de la forme

$$\int \left(\frac{\mathrm{A}}{1+nx} + \mathrm{B} + \mathrm{C}x + \mathrm{D}x^2\right)\frac{dx}{\mathrm{R}}.$$

(3). Nous conclurons de-là que, quelle que soit la fonction rationelle de x représentée par P, l'intégrale $\int \frac{\mathrm{P}\,dx}{\mathrm{R}}$ sera toujours décomposable en trois parties principales ; la première algébrique, la seconde de la forme $\int (\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2)\frac{dx}{\mathrm{R}}$, et la troisième renfermant un ou plusieurs termes de la forme $\mathrm{N}\int \frac{dx}{(1+nx)\mathrm{R}}$, où le coëfficient n peut être réel ou imaginaire.

On voit par cette analyse que le nombre des transcendantes comprises dans la formule $\int \frac{\mathrm{P}\,dx}{\mathrm{R}}$ est très-limité. Il

n'en existe que de deux espèces principales, l'une de la forme $\int (A + Bx + Cx^2)\frac{dx}{R}$, l'autre de la forme $\int \frac{dx}{(1+nx)R}$. J'observe même que tant que n est réel, cette seconde espèce est comprise dans la première, et s'y ramène immédiatement, en faisant $1 + nx = \frac{1}{z}$.

Ces réductions générales une fois apperçues, nous allons suivre une autre route pour parvenir à une connoissance plus précise des mêmes transcendantes.

Manière de faire disparoître les puissances impaires de la variable sous le radical.

(4). Le radical étant toujours $\sqrt{(\alpha + 6x + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon x^4)}$, supposons que la quantité sous le signe soit décomposée en deux facteurs réels $\zeta + 2\eta x + \theta x$, $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$. Ces facteurs doivent être de même signe pour que le radical soit réel, ainsi on peut supposer

$$\zeta + 2\eta x + \theta x^2 = (\lambda + 2\mu x + \nu x^2)y^2.$$

De-là on tire,

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + \sqrt{[(\mu y^2 - \eta)^2 + (\lambda y^2 - \zeta)(\theta - \nu y^2)]}}{\theta - \nu y^2}.$$

Et si on appelle, pour abréger, Y le radical de cette expression, on aura $\frac{dx}{R} = \frac{dy}{Y}$. La valeur de x étant substituée dans P, on voit que la différentielle $\frac{P dx}{R}$ ou $\frac{P dy}{Y}$ se décomposera toujours en deux parties, l'une rationnelle et intégrable par les règles ordinaires, l'autre affectée du radical Y, mais telle qu'il n'y aura que des puissances paires de y sous le radical et hors du radical. Ainsi l'intégration de la formule $\frac{P dx}{R}$ se réduit toujours à celle d'une

formul

formule de la même nature, dans laquelle P et R ne contiennent que des puissances paires de x.

(6). Cette méthode est générale ; cependant, comme la valeur de x, qui doit être substituée dans P, est un peu compliquée, il ne sera pas inutile de faire voir qu'on peut parvenir au même but par une substitution beaucoup plus simple, qui consiste à faire $x = \frac{p+qy}{1+y}$, p et q étant deux constantes indéterminées.

Reprenons les facteurs $\zeta + 2\eta x + \theta x^2$, $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$, et substituons dans chacun d'eux la valeur de x, on pourra faire abstraction du dénominateur commun qui sort du radical, et pour que les puissances impaires de y disparoissent dans les numérateurs, il faudra qu'on ait

$$\zeta + \eta(p+q) + \theta pq = 0,$$
$$\lambda + \mu(p+q) + \nu pq = 0.$$

Ces deux équations donneront des valeurs rationnelles de $p+q$ et pq; mais pour que p et q soient réels, il faut encore que $(p+q)^2 - 4pq$, ou $(p-q)^2$ soit positif. Or, on peut distinguer deux cas :

1°. Si la quantité $\alpha + 6x + \gamma x^2 +$, etc. n'a pas tous ses facteurs réels, on pourra supposer que $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$ en contient deux imaginaires, et qu'on a en conséquence $\lambda\nu > \mu^2$. Mais la seconde des équations en p et q donne

$$(p-q)^2 = \left(\frac{\lambda+\nu pq}{\mu} - \frac{2\mu}{\nu}\right)^2 + \frac{4\lambda\nu - 4\mu^2}{\nu^2};$$

donc dans ce premier cas le second membre est positif, et les valeurs de p et q seront réelles.

2°. Si la quantité $\alpha + 6x +$, etc. a tous ses facteurs réels, et qu'en la décomposant en deux facteurs du second degré, comme on vient de faire, il n'en résulte pas des valeurs

réelles pour p et q, alors on observera qu'il y a deux autres manières de décomposer la quantité du quatrième degré en deux facteurs du second, et on peut être assuré que ces deux nouvelles combinaisons donneront des valeurs réelles pour p et q. En voici la démonstration.

Soient a, b, c, d les quatre valeurs de x qu'on a en faisant $R = 0$, les équations qui déterminent p et q pourront s'écrire ainsi :

$$ab - \tfrac{1}{2}(a + b)(p + q) + pq = 0,$$
$$cd - \tfrac{1}{2}(c + d)(p + q) + pq = 0.$$

Il en résulte

$$p + q = \frac{ab - cd}{a + b - c - d},$$

$$\left(\frac{p - q}{2}\right)^2 = \frac{a - c.\ a - d.\ b - c.\ b - d}{(a + b - c - d)^2}.$$

Or, on est maître de rendre positif le numérateur de cette dernière quantité; car supposons que a, b, c, d soient écrites dans l'ordre de leur grandeur, les négatives venant après les positives, alors les différences $a - b$, $a - c$, etc. seront toutes positives, et $p - q$ sera réel. On aura encore $p - q$ réel, si on prend pour a et b les extrêmes en grandeur des racines a, b, c, d. Enfin, la troisième combinaison donneroit $p - q$ imaginaire.

Donc par la substitution de $x = \frac{p + qy}{1 + y}$, il est toujours possible de faire disparoître les puissances impaires de la variable sous le radical, et en même temps on obtient ce nouvel avantage, que les deux facteurs, sous le nouveau radical, seront réels et de la forme $f + gy^2$, ce qui est un point essentiel, et qu'on n'obtiendroit pas toujours par la première méthode.

Remarquons qu'il y a deux cas particuliers à examiner.

1°. Lorsque l'une des racines a et b est égale à l'une des racines c et d.

2°. Lorsqu'on a $a + b = c + d$. Dans le premier cas le radical R se simplifieroit, et l'intégrale ne dépendroit plus que des arcs-de-cercle et des logarithmes. Quant au second cas, il suffit d'une simple permutation pour cesser d'avoir $a + b = c + d$; mais on peut aussi profiter de cette circonstance pour faciliter la transformation. En effet, les deux facteurs de la quantité sous le radical étant alors de la forme, $\lambda + \nu(x^2 + 2mx)$, $\zeta + \theta(x^2 + 2mx)$, il est clair que si on fait $x + m = y$, les puissances impaires de la variable disparoitront.

Réduction de la différentielle $\frac{P\,dx}{R}$ *à la forme* $\frac{Q\,d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}$.

(6) Puisque par une première préparation on peut faire ensorte qu'il n'y ait pas de puissances impaires de la variable sous le radical, nous ferons désormais $R = \sqrt{(\alpha + 6x^2 + \gamma x^4)}$. Nous supposerons aussi que P est une fonction paire de x; car quelle que soit la fonction rationelle P, on peut toujours faire $P = M + N x$, M et N étant des fonctions paires de x: or, la partie $\frac{N x\,dx}{R}$ se ramène aux règles ordinaires, en faisant $x^2 = y$; ainsi toute la difficulté se réduit à intégrer la formule $\frac{M\,dx}{R}$, dans laquelle M est une fonction paire de x.

Cela posé, nous allons prouver par l'énumération des différens cas, que la différentielle $\frac{dx}{R}$ peut toujours se ramener à la forme $\frac{m\,d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}$, c étant plus petit que l'unité.

Premier cas. Supposons les facteurs de $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4$ imaginaires, et représentons cette quantité par $\lambda^2 + 2\lambda\mu x^2 \cos.\theta + \mu^2 x^4$, λ et μ étant positifs, et cos. θ pouvant être positif

ou négatif. On fera $x = \sqrt{(\frac{\lambda}{\mu})}$. tang. $\frac{1}{2}\phi$, et prenant $c = \sin.\frac{1}{2}\theta$, on aura la transformée

$$\frac{dz}{R} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\mu}} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}.$$

Second cas. Soit $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4 = m^2(1 + p^2x^2)(1 - q^2x^2)$; la limite de x étant $\frac{1}{q}$, on fera $x = \frac{1}{q}\cos.\phi$ et $\frac{p^2}{p^2+q^2} = c^2$, ce qui donnera

$$\frac{dz}{R} = \frac{c}{mp} \cdot \frac{-d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}.$$

Si on vouloit que la transformée fût positive, il faudroit faire $\cot.\phi = \sqrt{(1 - c^2)}$. tang. ψ, ce qui donne directement $x^2 = \frac{\sin.^2\psi}{q^2 + p^2\cos.^2\psi}$, et la transformée seroit

$$\frac{dz}{R} = \frac{c}{mp} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\psi)}}.$$

Troisième cas. Soit $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4 = m^2(1 + p^2x^2)(x^2 - q^2)$, on fera $x = \frac{q}{\cos.\phi}$, $\frac{1}{1 + p^2q^2} = c^2$, et on aura

$$\frac{dz}{R} = \frac{c}{m} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}.$$

Quatrième cas. Soit $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4 = m^2(1 + p^2x^2)(1 + q^2x^2)$, on supposera $p > q$, et faisant $x = \frac{\text{tang. } \phi}{p}$, $\frac{p^2 - q^2}{p^2} = c^2$, on aura,

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}.$$

Cinquième cas. Soit $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4 = m^2(1 - p^2x^2)(1 - q^2x^2)$, on supposera $p > q$, et faisant $px = \sin.\phi$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}.$$

Digitized by Google

Cette formule servira depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \frac{1}{p}$; le radical R seroit imaginaire depuis $x = \frac{1}{p}$ jusqu'à $x = \frac{1}{q}$; mais il redevient réel depuis $x = \frac{1}{q}$ jusqu'à $x = \infty$. Dans ce dernier cas, il faut écrire $R^2 = m^2(p^2x^2 - 1)(q^2x^2 - 1)$, et faisant $qx = \frac{1}{\sin.\varphi}$, $\frac{q}{p} = c$, la transformée sera $\frac{-d\varphi}{mp\sqrt{(1 - c^2\sin.^2\varphi)}}$. Si on veut qu'elle soit positive, il faudra, comme ci-dessus, faire $\cot.\phi = \sqrt{(1 - c^2)}$. Tang. ψ, ce qui donne directement $x^2 = \frac{1 - c^2\sin.^2\psi}{q^2\cos.^2\psi}$, et la transformée sera

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\psi}{\sqrt{(1 - c^2\sin.^2\psi)}}.$$

formule absolument semblable à la première ; d'où il suit que l'intégrale de $\frac{dx}{R}$ pour le cas de $x > \frac{1}{q}$ se déduira toujours de la même intégrale, prise en supposant $x < \frac{1}{p}$.

Sixième cas. Enfin, soit $\alpha + 6x^2 + \gamma x^4 = m^2(x^2 - q^2)(p^2 - x^2)$, alors x doit être compris entre p et q. Soit $p > q$, et soit fait $x = \frac{q}{\cos.\psi}$, on aura d'abord $\frac{dx}{R} = \frac{d\psi}{m\sqrt{(p^2 - q^2 + p^2\sin.^2\psi)}}$. Dans cette formule l'angle ψ a une limite ; pour en introduire un indéfini, soit $\sin.\psi = c\sin.\phi$, et $c^2 = \frac{p^2 - q^2}{p^2}$, on aura la transformée

$$\frac{dx}{R} = \frac{1}{mp} \cdot \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2\sin.^2\phi)}},$$

à laquelle on seroit parvenu directement en faisant

$$x^2 = \frac{q^2}{1 - c^2\sin.^2\phi}.$$

(7) On peut remarquer maintenant, qu'abstraction faite du premier cas, les valeurs de x^2, qui opèrent la réduction

cherchée, sont toujours de la forme $\frac{A+B\sin^2\phi}{C+D\sin^2\phi}$ où les coëfficiens sont constans. Il ne s'agit plus que de substituer cette valeur de x^2 dans P, et la formule $\int\frac{P\,dx}{R}$ sera transformée en une autre $\int\frac{Q\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\phi)}}$, dans laquelle c sera plus petit que l'unité, et Q sera une fonction rationelle paire de $\sin.\phi$, laquelle contiendra $\sin.\phi$ au même degré que P contient x.

Nous faisons abstraction du premier cas, parce que la la forme de la valeur de x est un peu différente, et que d'ailleurs en suivant la méthode de l'article 5, on évite ce cas puisqu'on tombe toujours sur des facteurs réels. Mais nous reviendrons dans un autre article sur le cas des facteurs imaginaires.

Développement de la formule $\int\frac{Q\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$.

(8). Nous représenterons dorénavant le radical $\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}$ par Δ, et aussi par $\Delta(\phi)$ et $\Delta:(c,\phi)$, lorsqu'on le regardera comme fonction de ϕ, ou comme fonction de c et ϕ.

Considérons d'abord le cas où Q seroit une fonction entière, et soit $Q=A+B\sin.^2\varphi+C\sin.^4\varphi+$ etc.; si on représente pour abréger l'intégrale $\int\frac{\sin.^{2k}\phi.d\phi}{\Delta}$ par Z^{2k}, on aura

$$\int\frac{Q\,dx}{\Delta}=AZ^0+BZ^2+CZ^4+\text{etc.}$$

Mais en différentiant la quantité $\Delta\cos.\phi\sin.^{2k-3}\phi$, on trouve aisément la formule.

$$\Delta\cos.\phi\sin.^{2k-3}\phi=(2k-3)Z^{2k-4}-(1+c^2)\times(2k-2)Z^{2k-2}+c^2(2k-1)Z^{2k};$$

D'où il suit que Z^4, Z^6, etc. peuvent s'exprimer au moyen de Z^0 et Z^2, et qu'ainsi dans le cas où Q est une fonction

entière, l'intégrale $\int \frac{Q\,d\phi}{\Delta}$ est égale à une quantité algébrique, plus une intégrale de la forme $\int (A+B\sin.^2\phi)\frac{d\phi}{\Delta}$.

(9). Soit maintenant Q une fonction quelconque rationelle de $\sin.^2\phi$; après avoir extrait la partie entière, et l'avoir traitée comme il vient d'être dit, le développement de la partie fractionnaire pourra toujours se faire de manière que chaque fraction partielle soit de la forme $\frac{N}{(1+n\sin.^2\varphi)^k}$, n et N étant des coëfficiens constans réels ou imaginaires. Il s'agira donc de réduire la formule $\int \frac{d\phi}{(1+n\sin.^2\phi)^k\Delta}$, et toutes les semblables aux formules les plus simples de la même espèce. Or, si on fait pour un moment $\sin.\phi = x$, cette formule deviendra

$$\int \frac{dx}{(1+nx^2)^k\sqrt{[1-(1+c^2)x^2+c^2x^4]}}.$$

Considérons, pour plus de généralité, la formule

$$\Pi^k = \int \frac{dx}{(1+nx^2)^k R},$$

dans laquelle R représente le radical $\sqrt{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)}$, on trouvera, toujours par la différentiation,

$$\frac{xR}{(1+nx^2)^{k-1}} = (2k-2)\left(\alpha-\frac{c}{n}+\frac{\gamma}{n^2}\right)\Pi^k-(2k-3)\left(\alpha-\frac{2c}{n}+\frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi$$
$$+(2k-4)\left(-\frac{2c}{n}+\frac{3\gamma}{n^2}\right)\Pi^{k-2}-(2k-5)\frac{\gamma}{n^2}\Pi^{k-3}.$$

De-là il résulte que le terme Π^k et tous les semblables où k est plus grand que l'unité, peuvent s'exprimer en partie algébriquement, en partie par les quantités Π^1, Π^0, Π^{-1}, qui sont les plus simples de leur espèce. On peut même observer que si $1+nx^2$ étoit diviseur de la quantité sous le radical, auquel cas on auroit $\alpha-\frac{c}{n}+\frac{\gamma}{n^2}=0$, alors la

brique; 2°. une intégrale de la forme $\int (A + B \sin.^2\phi) \frac{d\varphi}{\Delta}$, 3°. une ou plusieurs parties de la forme $\int \frac{N}{1 + n \sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$, dans chacune desquelles les coëfficiens N et n auront des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires.

Définition des transcendantes elliptiques, et leur division en trois espèces.

(11). Puisque les transcendantes que nous avons considérées se réduisent toujours à ces deux formes $\int (A + B \sin^2\varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}$, $\int \frac{d\varphi}{(1 + n \sin.^2\varphi)\Delta}$, il est clair qu'elles sont comprises dans la formule générale

$$H = \int \frac{A + B \sin.^2\phi}{1 + n \sin.^2\phi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Nous appellerons désormais, *fonctions* ou *transcendantes elliptiques*, les intégrales comprises dans cette formule. La transcendante H sera supposée s'évanouir ou commencer lorsque $\phi = 0$; son étendue sera déterminée par la variable ϕ, qu'on appellera *l'amplitude*; la constante c, toujours plus petite que l'unité, s'appellera *le module*; enfin $\sqrt{(1 - c^2)}$, que nous désignerons constamment par b, pourra s'appeller *le complément du module*.

La quantité H, lorsqu'on ne considère que la variabilité de ϕ, peut se désigner par $H(\phi)$; si on considère à la fois la variation du module et de l'amplitude, on peut la représenter par $H(c, \phi)$, et ainsi de suite, si on vouloit avoir égard à l'inégalité des coëfficiens.

(12). Il suffit de connoître toutes les valeurs de H, depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, et on connoîtra facilement la valeur de cette transcendante pour une amplitude quel-

conque. En effet, soit $\phi = i\,\pi \pm \alpha$, i étant un entier et α un arc plus petit que $\frac{\pi}{2}$, alors on aura

$$\Pi(\phi) = 2i\,\Pi\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \pm \Pi(\alpha).$$

Il en est à cet égard de la fonction Π comme des arcs d'ellipse, et en général des arcs de toutes les courbes ovales composées de quatre parties égales et semblables : un arc, quelque grand qu'il soit et renfermant, si l'on veut, plusieurs circonférences, s'exprime toujours sans difficulté par le quart de la courbe et une portion de ce quart. La fonction déterminée $\Pi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est en quelque sorte l'unité des fonctions Π : nous la désignerons par Π_1.

Il ne paroît pas que la fonction Π prise dans toute sa généralité, puisse se réduire à des arcs d'ellipse; cela n'a lieu que lorsque $n = 0$, ou lorsque quelque substitution peut faire disparoître le dénominateur $1 + n \sin.^2\phi$, ce que nous ne croyons pas possible en général. Ainsi la dénomination de fonction elliptique est impropre à quelques égards; nous l'adoptons néanmoins à cause de la grande analogie qu'on trouvera entre les propriétés de cette fonction et celles des arcs d'ellipse.

(13). Lorsque $n = 0$, ou lorsqu'une substitution convenable peut faire disparoître le dénominateur $1 + n \sin.^2\phi$, alors la fonction Π se simplifie considérablement. Il convient donc de la désigner par une autre initiale G : ainsi nous ferons désormais

$$G = \int \frac{(A + B \sin.^2\phi)\,d\phi}{\sqrt{(1 - e^2 \sin.^2\phi)}}.$$

La fonction G, comme nous le démontrerons ci-dessous, s'exprime toujours facilement par deux arcs d'ellipse, et

quant aux arcs d'ellipse eux mêmes, ils sont représentés par la formule

$$E = \int d\phi \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)},$$

sur quoi *voyez les Mémoires de l'Académie, année* 1786.

Enfin, eu égard à la simplicité analytique, la formule $\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2 \sin.^2\phi)}}$ est extrémement remarquable, et il est nécessaire de la désigner par un caractère particulier, ainsi nous ferons

$$F = \int \frac{d\phi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}},$$

cette fonction F peut, à plus forte raison, s'exprimer par deux arcs d'ellipse; mais elle peut aussi s'exprimer par l'arc E, et sa différence partielle relative au module c; car il est visible qu'on a

$$F = E - c\frac{dE}{dc}.$$

Cette expression seroit même, à notre avis, la plus commode pour le calcul numérique des intégrales, si on avoit des tables d'arcs d'ellipse, et qu'à côté de chaque arc on y ajoutât la valeur du coëfficient $\frac{dE}{dc}$.

Quoi qu'il en soit, la quantité F peut bien s'exprimer par E, mais non pas E par F, et encore moins G par F; et c'est, ce me semble, une preuve certaine que la fonction F, considérée analytiquement, est moins composée que les arcs d'ellipse. Si on soumettoit à la même épreuve les arcs d'hyperbole, on trouveroit qu'ils sont absolument de la même nature que les arcs d'ellipse; car de même qu'un arc d'hyperbole peut s'exprimer par deux arcs d'ellipse, de même un arc d'ellipse peut s'exprimer par deux arcs d'hyperbole. C'est ce qui deviendra évident par les valeurs que

nous donnerons ci-après de ces arcs, et qui d'ailleurs se trouvent dans les Mémoires cités de 1786.

(14). Il y a donc trois espèces distinctes de fonctions ou transcendantes elliptiques. La première et la plus simple est représentée par la formule

$$F = \int \frac{d\varphi}{\Delta};$$

la seconde est représentée par la formule

$$G = \int (A + B \sin.^2\varphi) \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Celle-ci renferme comme cas particulier, l'arc d'ellipse $F = \int \Delta d\varphi$, et l'arc d'hyperbole $Y = A \tang.\varphi - \int (1 - \sin.^2\varphi) \frac{\sin.^2\varphi}{\Delta}$. Enfin la troisième et la plus composée est représentée par la formule

$$H = \int \frac{A + B \sin.^2\varphi}{1 + n \sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}.$$

Dans cette dernière, les coefficiens A, B, n pourront être imaginaires; mais alors la formule H seroit accompagnée d'une formule semblable, qui n'en différeroit que par le signe de $\sqrt{-1}$, et la somme des deux donnera toujours un résultat réel.

On pourroit aussi, pour éviter les imaginaires, regarder comme une espèce particulière de fonctions elliptiques; la formule

$$K = \int \frac{A + B \sin.^2\varphi + C \sin.^4\varphi}{1 + 2n \cos.\varphi \sin.\varphi + n^2 \sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta};$$

mais nous ne jugeons pas nécessaire d'admettre cette quatrième espèce de transcendantes, et nous nous en tenons aux trois autres, fondés sur ce que les calculs par lesquels on détermine la valeur de H sont les mêmes, soit que n soit

réel, soit qu'il soit imaginaire. Ce qui nous paroît seulement indispensable, c'est que le module c soit réel, ainsi que l'amplitude φ, et qu'en même temps c soit plus petit que l'unité.

Comparaison des fonctions elliptiques de la première espèce.

(15). Tous les géomètres connoissent l'intégrale complète algébrique qu'Euler a donnée de l'équation,

$$\frac{dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon x^4)}}+\frac{dy}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y+\varepsilon y^4)}}=0;$$

cette intégrale sera d'un grand usage dans nos recherches. Et d'abord, en vertu des transformations précédentes, cette équation peut, sans perdre de sa généralité, être mise sous la forme

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\varphi)}}+\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}=0;$$

son intégrale est alors $F(\varphi)+F(\psi)=$ const. Mais la même intégrale trouvée par la méthode d'Euler, et réduite à la forme la plus simple, est

$$\cos.\varphi\cos.\psi-\sin.\varphi\sin.\psi\sqrt{(1-c^2\sin.^2\mu)}=\cos.\mu\ldots(a').$$

Dans celle-ci μ est la constante arbitraire, et on voit qu'en faisant $\varphi=0$ on a $\psi=\mu$, donc la première devient

$$F(\varphi)+F(\psi)=F(\mu):$$

Donc, toutes les fois qu'entre les angles φ, ψ, μ, il y aura la relation déterminée par l'équation (a'), la $F(\mu)$ sera égale à la somme des deux $F(\varphi)$, $F(\psi)$. Nous abandonnerons ici la considération de l'équation différentielle, pour examiner les conséquences que ce résultat présente par rapport aux fonctions elliptiques de la première espèce.

(16). Etant données deux fonctions elliptiques à volonté $F(\phi)$, $F(\psi)$, on peut trouver une troisième fonction $F(\mu)$ égale à leur somme; il faut pour cela tirer la valeur de μ de l'équation (a'). Or en représentant toujours $\sqrt{(1-c^2 \sin.^2\phi)}$ par Δ ou $\Delta(\phi)$, et le radical semblable en ψ par $\Delta(\psi)$, on trouve

$$\cos.\mu = \frac{\cos.\phi\cos.\psi - \Delta(\phi)\Delta(\psi)\sin.\phi\sin.\psi}{1-c^2\sin.^2\phi\sin.^2\psi},$$

$$\sin.\mu = \frac{\Delta(\psi)\sin.\phi\cos.\psi + \Delta(\phi)\sin.\psi\cos.\phi}{1-c^2\sin.^2\phi\sin.^2\psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\phi)\Delta(\psi) - c^2\sin.\phi\sin.\psi\cos.\phi\cos.\psi}{1-c^2\sin.^2\phi\sin.^2\psi},$$

$$\text{tang.}\,\mu = \frac{\Delta(\psi)\,\text{tang.}\,\phi + \Delta(\phi)\,\text{tang.}\,\psi}{1-\Delta(\phi)\Delta(\psi)\,\text{tang.}\,\phi\,\text{tang.}\,\psi},$$

Remarquons à l'égard de cette dernière formule que si on prenoit les angles ϕ' et ψ', tels que

$$\text{tang.}\,\phi' = \Delta(\psi)\,\text{tang.}\,\phi,\quad \text{tang.}\,\psi' = \Delta(\phi)\,\text{tang.}\,\psi,$$

il en résulteroit

$$\mu = \phi' + \psi',$$

ce qui est un moyen de calculer aisément l'angle μ par les tables des sinus, lorsqu'on connoîtra ϕ et ψ. Mais d'abord il faut calculer $\Delta(\phi)$ et $\Delta(\psi)$: pour cela prenez les angles α et 6 tels que sin. $\alpha = c$ sin. ϕ et sin. $6 = c$ sin. ψ, vous aurez $\Delta(\phi) = \cos.\alpha$, et $\Delta(\psi) = \cos.6$.

Ces formules feront donc connoître l'amplitude μ de la fonction elliptique, somme des deux fonctions dont ϕ et ψ sont les amplitudes. On peut déduire de-là l'amplitude de la fonction différence de deux autres fonctions; soit

$$F(\phi) - F(\psi) = F(\mu);$$

Digitized by Google

et l'amplitude μ de la fonction différence se déterminera par celle qu'on voudra des formules suivantes :

$$\cos.\ \mu = \frac{\cos.\phi\cos.\psi + \Delta(\phi)\Delta(\psi)\sin.\phi\sin.\psi}{1 - c^2\sin.^2\phi\sin.^2\psi},$$

$$\sin.\ \mu = \frac{\Delta(\psi)\sin.\phi\cos.\psi - \Delta(\phi)\sin.\psi\cos.\phi}{1 - c^2\sin.^2\phi\sin.^2\psi},$$

$$\Delta(\mu) = \frac{\Delta(\phi)\Delta(\psi) + c^2\sin.\phi\sin.\psi\cos.\phi\cos.\psi}{1 - c^2\sin.^2\phi\sin.^2\psi},$$

$$\text{tang.}\ \mu = \frac{\Delta(\psi)\,\text{tang.}\,\phi - \Delta(\phi)\,\text{tang.}\,(\psi)}{1 + \Delta(\phi)\Delta(\psi)\,\text{tang.}\,\phi\,\text{tang.}\,\psi}.$$

Dans cette dernière, si on fait tang. $\phi' = \Delta(\psi)$ tang. ϕ et tang. $\psi' = \Delta(\phi)$ tang. ψ, on aura $\mu = \phi' - \psi'$. Ces formules, pour la différence, se déduiroient des formules pour la somme, en changeant simplement dans celles ci le signe de ψ, et conservant $\Delta(\psi)$ positive. Il est inutile d'ailleurs de faire observer l'analogie qui regne entre les valeurs de cos. μ, sin. μ et celles de cos. $(\phi \pm \psi)$, sin. $(\phi \pm \psi)$; elles coïncideroient entièrement si on avoit $c = 0$.

(17). Puisque nous connoissons algébriquement l'amplitude de la fonction égale à la somme ou à la différence de deux fonctions données, il est clair qu'on peut trouver algébriquement une fonction elliptique multiple d'une fonction donnée, et qu'en général on peut résoudre sur la multiplication et division des fonctions elliptiques de la première espèce, les mêmes problèmes qu'on résout sur la multiplication et division des arcs de cercle. Désignons par ϕn l'amplitude de la fonction qui contient n fois la fonction dont l'amplitude est ϕ, ensorte qu'on ait $F(\phi n) = n F(\phi)$; il s'agiroit d'avoir l'expression générale de sin. ou cos. ϕn, par le moyen de sin. et cos. ϕ. Voici quelques recherches à ce sujet.

Les cas extrêmes n'ont aucune difficulté. Si on a $c = 0$, alors $\phi n = n\phi$, et on a la relation connue cos. ϕn + sin. $\phi n \sqrt{-1} = (\cos.\phi + \sin.\phi\sqrt{-1})^n$. Si on a $c = 1$,

alors la F (ϕ) devient $\int \frac{d\varphi}{\cos.\varphi}$, ou $\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right)$, de sorte que pour la multiplication des fonctions, on aura cette relation très-simple $\frac{1+\sin.\varphi\, n}{1-\sin.\varphi\, n} = \left(\frac{1+\sin.\varphi}{1-\sin.\varphi}\right)^n$. La difficulté est de trouver l'expression générale de sin. $\phi\, n$ lorsque c a une valeur quelconque entre 0 et 1.

Considérons d'abord le cas le plus simple, qui est celui de la duplication; alors on a

$$\cos.\phi\, 2 = \frac{1-2\sin.^2\varphi+c^2\sin.^4\varphi}{1-c^2\sin.^2\varphi},$$

$$\sin.\phi\, 2 = \frac{2\Delta(\phi)\sin.\varphi\cos.\varphi}{1-c^2\sin.^2\varphi},$$

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\phi\, 2 = \Delta(\phi).\text{tang.}\,\phi.$$

La dernière de ces formules paroît commode pour les calculs trigonométriques; car si on prend successivement les angles, α, $\alpha 2$, $\alpha 4$, tels qu'on ait:

$$\sin.\alpha = c\sin.\phi, \sin.\alpha 2 = c\sin.\phi 2, \sin.\alpha 4 = c\sin.\phi 4, \text{etc.}$$

il en résultera

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\phi 2 = \cos.\alpha\,\text{tang.}\,\phi, \quad \text{tang.}\tfrac{1}{2}\phi 4 = \cos.\alpha 2\,\text{tang.}\,\phi 2, \text{ etc.}$$

de sorte que la fonction F sera multipliée par 2, 4, 8, 16, etc.

Si on veut la diviser par les mêmes nombres, nous appellerons par analogie $\phi\frac{1}{2}$ l'amplitude de la fonction qui est moitié de F, et l'inverse des formules précédentes donnera

$$\sin.\phi\tfrac{1}{2} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{\left(\frac{1+\Delta}{2}\right)}}.$$

Soit encore $\sin.\alpha = c\sin.\phi$, ce qui donne $\Delta = \cos.\alpha$, on aura en termes fort simples

$$\sin.\phi\tfrac{1}{2} = \frac{\sin.\frac{1}{2}\varphi}{\cos.\frac{1}{2}\alpha};$$

Si

Si on fait de même sin. $\alpha\frac{1}{1}=c\sin.\phi\frac{1}{1}$, on aura

$$\sin.\phi\tfrac{1}{1}=\frac{\sin.\frac{1}{2}\phi\frac{1}{2}}{\cos.\frac{1}{2}\alpha\frac{1}{2}},$$

et ainsi de suite.

(18). Venons à la multiplication et division par un nombre quelconque. Pour cela considérons les trois amplitudes consécutives $\phi\overline{n-1}$, ϕn, $\phi\overline{n+1}$, qui, suivant l'indication, répondent aux fonctions $(n-1)\,F$, $n\,F$, $(n+1)F$. Les formules pour la somme et la différence de deux fonctions, s'appliqueront aux équations $F(\phi\overline{n+1})=F(\phi n)+F(\phi)$, $F(\phi\overline{n-1})=F(\phi n)-F(\phi)$, et il en résultera

$$\sin.\phi\overline{n+1}+\sin.\phi\overline{n-1}=\frac{2\Delta\cos.\phi\sin.\phi n}{1-c^2\sin.^2\phi\sin.^2\phi n}$$

$$\cos.\phi\overline{n+1}+\cos.\phi\overline{n-1}=\frac{2\cos.\phi\cos.\phi n}{1-c^2\sin.^2\phi\sin.^2\phi n}.$$

Ces formules où Δ et ϕ restent constamment les mêmes, tandis que n varie, paroissent aussi commodes qu'il est possible, pour en tirer les valeurs successives de sin. $\phi 2$, sin. $\phi 3$, cos. $\phi 2$, cos. $\phi 3$, etc. Ainsi, en faisant pour abréger $2\Delta\cos.\phi=p$, $1-c^2\sin.^4\phi=q$, $c^2\sin.^4\phi=1-q=r$, on trouvera

$$\sin.\phi 2=\frac{p}{q}\sin.\phi,$$

$$\sin.\phi 3=\frac{p^2-q}{q-rp^2}\sin.\phi,$$

$$\sin.\phi 4=\frac{(1+r)p^2-2q}{q-rp^2}.pq\sin.\phi,$$

$$\sin.\phi 5=\frac{q^2-3p^2q+(1+2r)p^4q-rp^6}{q^3-3rp^2q+r(r+2)p^4q-rp^6}\sin.\phi,$$

etc.

Mais ces expressions étant entièrement développées, deviennent fort composées, et leur loi est très-difficile à appercevoir.

Lorsqu'il s'agira de calculer trigonométriquemet ϕn par le moyen de ϕ, on y parviendra aisément de cette manière. Les deux formules ci-dessus donnent par la division

$$\frac{\sin.\phi\overline{n+1}+\sin.\phi\overline{n-1}}{\cos.\phi\overline{n+1}+\cos.\phi\overline{n-1}}=\Delta\,\text{tang.}\,\phi n,$$

ce qui se réduit à cette formule très-simple

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi\overline{n+1}+\tfrac{1}{2}\phi\overline{n-1})=\Delta\,\text{tang.}\,\phi n;$$

d'où l'on tire successivement

$$\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\phi 2=\Delta\,\text{tang.}\,\phi.$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi 3+\tfrac{1}{2}\phi)=\Delta\,\text{tang.}\,\phi 2.$$
$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi 4+\tfrac{1}{2}\phi 2)=\Delta\,\text{tang.}\,\phi 3,$$
$$\text{etc.}$$

Or Δ étant toujours le même dans ces formules, on ne peut rien desirer de plus simple pour calculer les valeurs successives de $\phi 2$, $\phi 3$, etc. par le moyen de ϕ. On pourroit aussi procéder par de plus grands intervalles au calcul de ϕm, m étant aussi grand qu'on voudra; car on a semblablement

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi\overline{n+i}+\tfrac{1}{2}\phi\overline{n-i})=\Delta i\,\text{tang.}\,\phi n,$$

Δi étant le Δ qui répond à l'amplitude ϕi.

La division d'une fonction elliptique donnée en un certain nombre de parties égales, est un problème algébrique qu'on résoudra par le développement des formules qui servent à la multiplication. On a déjà vu les formules pour diviser par 2 ou par une puissance de 2; supposons qu'on veuille diviser la fonction F en trois parties égales; soit $\phi 3$ l'am-

plitude donnée de la fonction F, et ϕ celle de la fonction qui en est le tiers. Nous ferons sin. $\phi 3 = a$, sin. $\phi = x$, et l'équation à résoudre pour la trisection sera

$$a = \frac{3 - 4(1+c^2)x^2 + 6c^2x^4 - c^4x^6}{1 - 6c^2x^4 + 4c^2(1+c^2)x^6 - 3c^4x^8}\, x.$$

Cette équation est du neuvième degré; elle seroit du 25e pour la quintisection, et ainsi de suite.

Les équations sont moins composées de moitié, lorsqu'il s'agit de diviser la fonction entière F 1, dont l'amplitude est de 90°. Supposons en général $\phi n = 90°$, la formule (a') de l'article 15, où l'on peut faire $\mu = 90°$, donnera d'abord cette relation

$$\text{tang. } \phi \overline{n-i} = \frac{1}{b} \text{ cot. } \phi i,$$

de sorte qu'on a successivement tang. $\phi \overline{n-1} = \frac{1}{b}$ cot. ϕ, tang. $\phi \overline{n-2} = \frac{1}{b}$ cot. ϕ 2, tang. $\phi \overline{n-3} = \frac{1}{b}$ cot. ϕ 3, etc. Ensuite à cause de $\phi n = 90°$, on a aussi

$$\text{tang. } (45° + \tfrac{1}{2}\phi \overline{n-2}) = \Delta \text{ tang. } \phi \overline{n-1} = \frac{\Delta}{b} \text{ cot. } \phi$$

$$\text{tang. } (\tfrac{1}{2}\phi \overline{n-1} + \tfrac{1}{2}\phi \overline{n-3}) = \Delta \text{ tang. } \phi \overline{n-2},$$

etc.

De là résulteront des formules assez simples pour déterminer $\phi \overline{n-1}$, $\phi \overline{n-2}$, etc. Développant de même celles qui donnent ϕ 2, ϕ 3, etc., on aura par la rencontre de ces deux suites, l'occasion d'établir l'égalité qui doit déterminer ϕ; ainsi lorsque $n = 3$, cette équation est immédiatement

$$\text{tang. } (45° + \tfrac{1}{3}\phi) = \frac{\Delta}{b} \text{ cot. } \phi,$$

ou b sin. $\phi = \Delta(1 - \text{sin. } \phi)$, d'où l'on tire, en faisant sin. $\phi = x$,

$$0 = 1 - 2x + 2c^2x^3 - c^2x^4.$$

Équation pour la trisection de la fonction F 1, et dont le degré est seulement 4 ou $\frac{2-1}{1}$.

Lorsque $n = 5$, il faudra éliminer $\phi 3$ des deux équations

$$\text{tang.}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi 3) = \frac{\Delta \cos.\phi}{b},$$

$$\text{tang.}\,(\tfrac{1}{2}\phi 3 + \tfrac{1}{2}\phi) = \Delta\ \text{tang.}\ \phi 2;$$

et ensuite mettre au lieu de tang. $\phi 2$ sa valeur $\frac{2\Delta \sin.\phi \cos.\phi}{1-2\sin.^2\phi + c^2 \sin.^4\phi}$. On obtiendra ainsi en faisant $\sin.\phi = x$,

$$\frac{(1+x)\Delta}{bx} = \frac{1+2x-2c^2x^2-c^2x^4}{1-2x+2c^2x^3-c^2x^4},$$

équation pour la quinti-section de la fonction F 1, et qui étant entièrement développée, montera au degré $12 = \frac{25-1}{2}$.

Telles sont les formules par lesquelles on peut trouver la relation entre ϕn et ϕ pour que $F(\phi n) = nF(\phi)$, n étant un nombre entier. S'il falloit trouver la relation entre ϕ et ψ pour que $F(\psi) = \frac{m}{n} F(\phi)$, m et n étant des entiers, on prendroit un angle auxiliaire ω tel que $nF(\psi) = F(\omega)$, et $mF(\phi) = F(\omega)$. La première condition donnera une équation algébrique entre les sinus et cosinus des angles ψ et ω; la seconde, une entre ceux des angles ϕ et ω; d'où éliminant ω, on aura la relation cherchée entre ϕ et ψ.

(19). De-là il résulte qu'on peut toujours trouver l'intégrale algébrique complète de l'équation

$$\frac{m d\phi}{\sqrt{(1-c^2 \sin.^2\phi)}} + \frac{n d\psi}{\sqrt{(1-c^2 \sin.^2\psi)}} = 0;$$

m et n étant des nombres entiers. Car l'intégrale est d'abord $mF(\phi) + nF(\psi) = \text{const.}$, et si on suppose que lorsque $\phi = 0$, $\psi = \mu$, la constante sera $nF(\mu)$, et ainsi on aura

$$mF(\phi) + nF(\psi) = nF(\mu).$$

Or, on peut avoir une équation algébrique qui représente cette équation transcendante; car si on fait $F(\omega)=F(\mu)-F(\psi)$, ce qui donnera $mF(\phi)=nF(\omega)$; chacune de ces équations pourra s'exprimer en termes algébriques, et ainsi en éliminant ω, on aura l'intégrale algébrique complète de l'équation proposée.

En général, si on avoit l'équation suivante dans laquelle m, n, p, etc. sont des entiers positifs ou négatifs, et dont le nombre des termes est à volonté, pourvu qu'il ne soit pas infini

$$0=\frac{m\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}+\frac{n\,d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}+\frac{p\,d\omega}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\omega)}}+\text{etc,}$$

l'intégrale complète sera $F(\mu)=mF(\phi)+nF(\psi)+pF(\omega)+$etc., μ étant la constante arbitraire. Or, cette équation transcendante peut toujours se changer en une équation algébrique; car en faisant $F(\phi')=mF(\phi)$, $F(\psi')=nF(\psi)$, $F(\omega')=pF(\omega)$, etc., ce qui donne $F(\mu)=F(\phi')+F(\psi')+F(\omega')+$etc., chacune de ces équations pourra être changée en une équation algébrique, et si on élimine ϕ', ψ', ω', etc., l'équation résultante renfermera l'arbitraire μ, et sera l'intégrale algébrique complète de la proposée.

Si on appelle $R(x)$ le radical $\sqrt{(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}$, $R(y)$ un radical semblable en y, etc. et que m, n, p, etc. désignent toujours des nombres entiers positifs ou négatifs, il est clair que l'équation

$$0=\frac{m\,dx}{R(x)}+\frac{n\,dy}{R(y)}+\frac{p\,dz}{R(z)}+\text{etc.}$$

pourra toujours être réduite à la forme précédente, et qu'ainsi elle aura toujours une intégrale algébrique complète.

Rien n'empêcheroit de supposer que z et les variables suivantes fussent des fonctions algébriques données de x

et y; alors l'équation précédente ne renfermeroit que deux variables, et malgré l'infinité de formes dont elle seroit susceptible, elle admettroit toujours une intégrale algébrique complète. Il me semble que l'on n'a pas encore fait attention à cette manière de généraliser le résultat d'Euler concernant l'équation $\frac{dx}{R(x)}+\frac{dy}{R(y)}=0$. Un grand géomètre s'est proposé, *Mém. de Turin, tome IV*, de trouver des cas d'intégrabilité de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$, dans laquelle X est un polynome en x, et Y un polynome en y; mais il ne paroît pas que ses recherches l'aient conduit au-delà de l'équation d'Euler, car l'équation qu'il donne, page 119, comme étant plus générale, s'y ramène immédiatement en faisant $v=ky$, et donnant au coëfficient k une valeur convenable. Ainsi il est très-douteux qu'avec deux termes seulement l'équation d'Euler puisse être généralisée, mais avec un plus grand nombre on voit qu'elle admet une grande extension.

(20). Puisque les fonctions F peuvent être multipliées ou divisées à volonté, cette propriété peut servir à les évaluer par approximation. D'abord nous supposerons que ϕ ne surpasse pas 90°, car nous avons fait voir (art. 12) que tous les cas se réduisent à celui-là. Cela étant, on déterminera $\phi\frac{1}{2}$ par l'art. 17, de manière que $F(\phi\frac{1}{2})=\frac{1}{2}F(\phi)$, et l'intégrale $\int\frac{d\phi\frac{1}{2}}{\Delta(\phi\frac{1}{2})}$ aura une étendue moindre que $\int\frac{d\phi}{\Delta(\phi)}$ de près de moitié, si c sin ϕ n'est pas trop près de l'unité. Par une seconde bisection, on peut faire ensorte que $F(\phi\frac{1}{4})=\frac{1}{4}F(\phi)$, et l'intégrale $\int\frac{d\phi\frac{1}{4}}{\Delta(\phi\frac{1}{4})}$ aura encore une étendue près de deux fois moindre, et ainsi de suite. Mais lorsque l'amplitude ϕ est devenue très-petite, la $F(\phi)$ se réduit sensiblement à l'arc ϕ. Donc quelle que soit la première valeur de ϕ, la fonction correspondante $F(\phi)$ sera égale au dernier terme de la suite $2\phi\frac{1}{2}$, $4\phi\frac{1}{4}$, $8\phi\frac{1}{8}$, etc., et dans la plupart des cas on obtiendra cette limite par un calcul assez court.

EXEMPLE.

Soit proposé de trouver la valeur de F lorsque $c = \sqrt{(\frac{2+\sqrt{3}}{4})} = \text{sin. } 75^\circ$, et tang. $\phi = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{3}})}$; on trouvera en se servant des formules de l'art. 17, et opérant par les tables de Gardiner, ce qui suit :

ϕ	$= 47^\circ$	$3'$	$30'',91$	α	$= 45^\circ$	$0'$	$0'',00$
$\phi\frac{1}{2}$	$= 25$	36	$5,64$	$\alpha\frac{1}{2}$	$= 24$	40	$10,94$
$\phi\frac{1}{4}$	$= 13$	6	$30,985$	$\alpha\frac{1}{4}$	$= 12$	39	$15,83$
$\phi\frac{1}{8}$	$= 6$	35	$40,741$	$\alpha\frac{1}{8}$	$= 6$	22	$8,4$
$\phi\frac{1}{16}$	$= 3$	18	$8,748$	etc.			
etc.							

Les deux dernières valeurs donnent

$$8\phi\frac{1}{8} = 52^\circ\ 45'\ 25'',93,$$
$$16\phi\frac{1}{16} = 52\ 50\ 19,97.$$

Leur différence est $4'\ 54'',04$; et comme par la nature de ces approximations, un résultat doit approcher de la limite environ quatre fois plus que le précédent, nous ajouterons au dernier résultat le tiers de la différence $4'\ 54'',04$, qui est $1'\ 38'',01$, et nous aurons ainsi pour la valeur de F l'arc très-approché

$$52^\circ\ 51'\ 57'',98,$$

qui en parties du rayon $= \frac{\pi}{2} \times 0,5874012 = 0,9226877$.

Cette méthode pourroit devenir très-longue dans quelques cas : nous en donnerons ci-dessous une beaucoup plus expéditive.

Remarque sur le mouvement du pendule simple.

(21). Nous avons fait voir dans les Mém. de l'Acad. année 1786, page 637, qu'il y a deux cas dans le mouvement d'un pendule simple; l'un, dans lequel il fait simplement des oscillations autour de la verticale; l'autre, où il tourne sans cesse dans le même sens. Mais comme les deux cas conduisent à la même formule, nous considérerons simplement celui des oscillations. Soit donc 1 la gravité, l la longueur du pendule, h la hauteur due à la vîtesse au point le plus bas, ϕ l'angle dont le pendule est éloigné de la verticale au bout du temps t; soit de plus $\frac{h}{2l}=c^2$, et $\sin.\frac{1}{2}\phi=c\sin.\psi$, on aura $t=\sqrt{l}.\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}$, et par conséquent $t=\sqrt{l}.F(\psi)$. Ainsi, le temps employé à parcourir un arc quelconque est une fonction elliptique de la première espèce, et il jouit de toutes les propriétés de ces fonctions. On voit donc qu'étant donné un arc parcouru dans le tems t, on pourra trouver algébriquement un autre arc parcouru dans un temps multiple de t, ou en général commensurable avec t. On peut aussi trouver un arc tel que le temps, par cet arc, soit égal à la somme ou à la différence des temps par plusieurs autres arcs donnés, et cela soit que ces arcs aboutissent à la verticale, soit qu'ils n'y aboutissent pas. Ces propriétés sont nouvelles et curieuses, et il ne paroît pas que personne ait remarqué qu'on pouvoit comparer algébriquement les temps des portions d'oscillation comme on compare les arcs-de-cercle. Pour en donner un exemple fort simple, soit proposé de diviser en deux parties égales le temps de la demi-oscillation. Nous appellerons ϕ l'arc compté depuis la verticale jusqu'au point qui répond au milieu de la demi oscillation, et je dis que la corde de l'arc ϕ sera à la corde de a, comme $\sqrt{2}$ est à 1. En effet, puisqu'on doit avoir $F(\psi)=\frac{1}{2}F(90^\circ)$, la formule

de

de l'article 17 donnera $\sin.^2\psi = \frac{1}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$, et par conséquent $\sin.^2\frac{1}{2}\phi = \frac{c^2}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$. Mais il est aisé de voir qu'on a $c = \sin.\frac{1}{2}a$, donc $\sin.^2\frac{1}{2}\phi = 1 - \cos.\frac{1}{2}a = 2\sin.^2\frac{1}{2}a$ do c $2\sin.\frac{1}{2}\phi : 2\sin.\frac{1}{2}a :: \sqrt{2} : 1$.

Comparaison des fonctions elliptiques de la seconde espèce.

(22). Considérons deux fonctions elliptiques de la seconde espèce, qui ne diffèrent que par les amplitudes ϕ et ψ, ensorte qu'on ait

$$G(\phi) = \int \frac{(A+B\sin.^2\phi)\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}},\quad G(\psi) = \int \frac{(A+B\sin.^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}}.$$

Supposons que les angles ϕ et ψ ont entr'eux la relation comprise dans l'équation $F(\phi)+F(\psi)=F(\mu)$, μ étant une constante, ce qui donne

$$\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}} + \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}} = 0;$$

il en résultera $G(\phi)+G(\psi) = \int \frac{B(\sin.^2\phi-\sin.^2\psi)\,d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}} + \text{const.}$

Mais lorsque $\phi=0$, on a $\psi=\mu$; ainsi, en supposant l'intégrale prise depuis $\phi=0$, on aura

$$G(\phi)+G(\psi) = G(\mu) + \int B(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)\,\frac{d\phi}{\Delta(\phi)}.$$

Or, l'équation $F(\phi)+F(\psi)=F(\mu)$ revient à l'équation (α') de l'art. 15, et de celle-ci on tire, après quelques réductions,

$$d\phi\,\Delta(\phi) + d\psi\,\Delta(\psi) = c^2\sin.\mu\,d(\sin.\phi\sin.\psi).$$

D'ailleurs on a $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$, donc $(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)\,\frac{d\phi}{\Delta} = -\sin.\mu\,d(\sin.\phi\sin.\psi)$. Donc enfin

$$G(\phi)+G(\psi)-G(\mu) = -B\sin.\mu\sin.\phi\sin.\psi.$$

On voit par-là que la même relation entre les angles ϕ, ψ, μ, qui donne $F(\phi)+F(\psi)-F(\mu)=0$, donne $G(\phi)+G(\psi)-G(\mu)$, sinon nulle, au moins égale à une quantité algébrique fort simple. Cette équation est la source d'une multitude de conséquences analogues à celles qui ont lieu pour la fonction F. Si on désigne comme ci-dessus par $\phi 2$, $\phi 3$, $\phi 4$, etc. les amplitudes telles que $F(\phi 2)=2F(\phi)$, $F(\phi 3)=3F(\phi)$, etc., on aura en vertn de cette équation,

$$G(\phi 2)-2G(\phi)=B\sin.\phi\sin.\phi\sin.\varphi 2,$$

$$G(\phi 3)-3G(\phi)=B\sin.\phi(\sin.\phi\sin.\phi 2+\sin.\phi 2\sin.\varphi 3),$$

$$G(\phi 4)-4G(\phi)=B\sin.\phi(\sin.\phi\sin.\varphi 2+\sin.\phi 2\sin.\phi 3+\sin.\varphi 3\sin.\varphi 4),$$

etc.

Donc la même relation entre ϕn et ϕ qui donne $F(\phi n)=nF(\phi)$, donnera $G(\phi n)-nG(\phi)$ égale à une quantité algébrique.

(23). On voit, sans entrer dans de plus grands détails, que si m, n, p, etc. sont des nombres entiers positifs ou négatifs, on peut faire ensorte que

$$mG(\phi)+nG(\psi)+pG(\omega)+\text{etc.}$$

soit égale à une quantité algébrique : il faut pour cela établir entre les angles ϕ, ψ, ω, etc. la relation qui donne

$$0=mF(\phi)+nF(\psi)+pF(\omega)+\text{etc.}$$

Nous observerons que les fonctions $F(\phi)$, $G(\phi)$, sont en général du même signe que ϕ; lorsque ϕ change de signe, elles en changent aussi, en conservant la même valeur. Cela posé, on peut satisfaire à l'équation

$$0=mF(\phi)+nF(\psi)+pF(\omega)+\text{etc.}$$

de bien des manières différentes, car on est maître de changer à volonté le signe de chaque coefficient, pourvu qu'on

change en même-temps le signe de l'amplitude correspondante. Mais on peut se borner à considérer les fonctions $F(\phi)$, $F(\psi)$, $G(\varphi)$, etc. comme toujours positives, et dans ce cas il n'y aura jamais qu'une relation entre les angles, ϕ, ψ, ω, etc. qui donnera $o = m\,F(\varphi) + n\,F(\psi) + p\,F(\omega) + \text{etc.}$: alors on voit que les coëfficiens m, n, p, etc. ne sauroient être tous positifs.

Tout ce que nous venons de démontrer de la fonction G en général, s'applique aux arcs d'ellipse en particulier, et s'étend facilement aux arcs d'hyperbole. Les résultats s'accordent avec ceux que nous avons trouvés dans le volume cité de 1786; mais l'ensemble de ces propriétés se fait mieux sentir ici par les rapports entre les fonctions elliptiques de la seconde espèce et celles de la première. Nous allons voir que les fonctions de la troisième espèce jouissent de propriétés semblables, avec cette gradation que la différence qui est nulle dans les fonctions de la première espèce, algébrique dans celles de la seconde, est transcendante dans celles de la troisième, mais peut toujours se déterminer par les arcs de cercle et les logarithmes.

Comparaison des fonctions elliptiques de la troisième espèce.

(24). La formule générale de ces fonctions est

$$H(\phi) = \int \frac{A + B\sin.^2\varphi}{1 + n\sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\phi)};$$

si on considère une fonction semblable en ψ, et qu'on suppose entre ϕ, ψ et la constante μ, l'équation $F(\phi) + F(\psi) - F(\mu) = o$, il en résultera, à cause de $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = o$,

$$H(\phi) + H(\psi) - H(\mu) = \int \left\{ \frac{A + B\sin.^2\phi}{1 + n\sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{A + B\sin.^2\psi}{1 + n\sin.^2\psi} \cdot \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} \right\}$$

$$= \int \frac{(B - An)(\sin.^2\varphi - \sin.^2\psi)}{1 + n(\sin.^2\varphi + \sin.^2\psi) + n^2\sin.^2\varphi\sin.^2\psi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Soit $\sin.^2\phi + \sin.^2\psi = p$, $\sin.\phi \sin.\psi = q$; nous avons déja trouvé (article 22), $(\sin.^2\phi - \sin.^2\psi)\frac{d\varphi}{\Delta} = -\sin.\mu\, d(\sin.\phi \sin.\psi)$, ainsi nous aurons

$$H(\phi) + H(\psi) - H(\mu) = \int \frac{(An - B)\sin.\mu.\, dq}{1 + np + n^2 q^2};$$

mais l'équation algébrique entre ϕ, ψ, μ est $\cos.\phi \cos.\psi = \Delta(\mu)\sin.\phi \sin.\psi + \cos.\mu$: si on l'élève au quarré, et qu'on fasse les substitutions, on en tirera $p = \sin.^2\mu - 2q\Delta(\mu)\cos.\mu + q^2 c^2 \sin.^2\mu$, valeur qui étant mise dans la formule précédente, donnera

$$H(\phi) + H(\psi) - H(\mu) = \int \frac{(An - B)\sin.\mu\, dq}{1 + n\sin.^2\mu - 2nq\Delta(\mu)\cos.\mu + q^2(n^2 + nc^2\sin.^2\mu)},$$

l'intégrale qui reste dans celle-ci devant être prise depuis $q = 0$.

De cette équation, et de toutes celles qu'on peut former de la même manière entre trois fonctions, nous conclurons que si m', n', p', etc. sont des entiers positifs ou négatifs, on peut toujours faire ensorte que

$$m' H(\phi) + n' H(\psi) + p' H(\omega) + , \text{ etc.}$$

soit égale à une quantité déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes. Il faut pour cela établir entre les amplitudes ϕ, ψ, ω, etc. la relation qui donne

$$m' F(\phi) + n' F(\psi) + p' F(\omega) + , \text{ etc.} = 0.$$

Ce résultat ne souffre aucune exception ; il auroit lieu même quand les coëfficiens A, B, n seroient imaginaires. Mais on peut considérer ces propriétés sous un point de vue plus général.

(25). Soit P ou $P(\phi)$ une fonction rationelle paire de $\sin.\phi$, et soit

$$Z(\phi) = \int \frac{P(\varphi)\, d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2\sin.^2\varphi)}},$$

soit $Z(\psi)$ une fonction semblable à $Z(\phi)$, et supposons toujours qu'on a l'équation cos. ϕ cos. $\psi = \Delta(\mu)$ sin. ϕ sin. ψ + cos μ, laquelle en supposant μ constant donne $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} + \frac{d\psi}{\Delta(\psi)} = 0$, on aura donc

$$Z(\phi) + Z(\psi) - Z(\mu) = \int \{ P(\phi) - P(\psi) \} \frac{d\phi}{\Delta(\phi)}.$$

Faisons comme ci dessus sin.$^2\phi$ + sin.$^2\psi = p$, sin. ϕ sin. $\psi = q$, il en résultera

$$\text{sin.}^2\phi = \tfrac{1}{2}p + \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q^2)}$$
$$\text{sin.}^2\psi = \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4q^2)}.$$

Substituons maintenant la valeur de sin.$^2\phi$ dans P, le résultat sera de la forme

$$P(\phi) = M + N\sqrt{(p^2 - 4q^2)},$$

M et N étant des fonctions rationelles de p et q. Il est clair qu'on aura de même

$$P(\psi) = M - N\sqrt{(p^2 - 4q^2)};$$

donc $P(\phi) - P(\psi) = 2N\sqrt{(p^2 - 4q^2)} = 2N(\text{sin.}^2\phi - \text{sin.}^2\psi)$, et ainsi l'intégrale $\int \{ P(\phi) - P(\psi) \} \frac{dq}{\Delta(\phi)} = \int 2N(\text{sin.}^2\phi - \text{sin.}^2\psi) \frac{d\phi}{\Delta(\psi)} = -2 \text{ sin. } \mu \int N\, dq$; donc enfin

$$Z(\phi) + Z(\psi) - Z(\mu) = -2 \text{ sin. } \mu \int N\, dq.$$

Dans cette formule, N est une fonction rationelle de p et q; si on y substitue la valeur de p trouvée dans l'art. 24, N sera une fonction rationelle de q seule, et ainsi la valeur de $Z(\phi) + Z(\psi) - Z(\mu)$ pourra toujours se déterminer par les arcs de cercle et les logarithmes.

En général, si m', n', p', etc. désignent des nombres

entiers positifs ou négatifs, et qu'on établisse entre les angles ϕ, ψ, ω, etc. la relation $0 = m' F(\phi) + n' F(\psi) + p' F(\omega)$, cette même relation donnera

$$m' Z(\phi) + n' Z(\psi) + p' Z(\omega) + \text{etc.}$$

égale à une quantité déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes. La même propriété auroit lieu quand même P contiendroit des puissances impaires de sin. ϕ, car la partie de Z, affectée des puissances impaires, s'intégreroit par les règles ordinaires.

Il en est absolument de même de la fonction

$$Z(x) = \int \frac{P\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}},$$

P étant une fonction rationelle de x, et on pourra toujours trouver une équation algébrique entre x, y, z, etc. en vertu de laquelle

$$m' Z(x) + n' Z(y) + p' Z(z) + \text{etc.}$$

soit déterminable par les arcs de cercle et les logarithmes.

Méthode d'approximation appliquée aux fonctions elliptiques de la première espèce.

(26). La méthode que nous allons suivre est la même que celle dont nous avons fait usage dans le volume cité de 1786, pour ramener la rectification d'un ellipse donnée à celle de deux autres ellipses aussi peu différentes du cercle qu'on voudra. L'esprit de cette méthode consiste à ramener l'intégrale d'une différentielle affectée du radical $\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \phi)}$ à celle d'une différentielle semblable où le module c soit plus petit que toute quantité donnée.

Dans le cas de la rectification de l'ellipse, le module c représente l'excentricité, et son complément $\sqrt{(1 - c^2)}$, ou b est le demi-petit axe. Nous avons fait voir qu'en supposant

constamment le demi-grand axe = 1, toutes les ellipses qui se rectifient ainsi par le moyen de deux d'entre elles, et qui composent une même *suite* ou *famille*, ont des excentricités c, c', c'', etc. formées d'après cette loi.

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}, c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'}, \; c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''}, \text{ etc.}$$

Dans ce sens les excentricités augmentent continuellement, et s'approchent très-rapidement de l'unité; elles décroissent avec la même rapidité dans le sens contraire. Nous désignerons par c, c^0, c^{00}, etc. la même suite continuée en arrière, ensorte que la suite complète des excentricités qui a d'un côté zéro pour limite, et de l'autre l'unité, soit

$$0 \ldots\ldots c^{000}, c^{00}, c^0, c, c', c'', c''' \ldots\ldots 1,$$

on aura donc semblablement

$$c = \frac{2\sqrt{c^0}}{1+c^0}, \; c^0 = \frac{2\sqrt{c^{00}}}{1+c^{00}}, \text{ etc.};$$

mais pour déterminer c^0 par le moyen de c, on fera usage de la formule $c^0 = \frac{1-\sqrt{(1-c^2)}}{1+\sqrt{(1-c^2)}}$, ou $c^0 = \frac{1-b}{1+b}$, et ainsi on aura

$$c^0 = \frac{1-b}{1+b}, c^{00} = \frac{1-b^0}{1+b^0}, c^{000} = \frac{1-b^{00}}{1+b^{00}}, \text{ etc.}$$

C'est par cette loi qu'on déterminera les modules décroissans c^0, c^{00}, c^{000}, etc. dont nous ferons un grand usage dans les recherches suivantes. On pourroit y employer les formules

$$b^0 = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}, \; b^{00} = \frac{2\sqrt{b^0}}{1+b^0}, \text{ etc.}$$

Enfin on donnera ci-après un moyen de les calculer facilement par les tables des sinus.

(27). Cela posé, considérons la formule intégrale $F = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - c^2 \sin.^2 \varphi)}}$, et soit pris une nouvelle variable ϕ' telle que

$$2 \sin.^2 \phi = 1 + c^0 \sin.^2 \phi^0 - \Delta^0 \cos. \phi^0 ;$$

nous venons d'expliquer comment c^0 se déduit de c ; quant à Δ^0, il est mis par analogie pour $\sqrt{(1 - c^{0^2} \sin.^2 \phi^0)}$. Il résultera de cette supposition :

$$2 \cos.^2 \phi = 1 - c^0 \sin.^2 \phi^0 + \Delta^0 \cos. \phi^0$$

$$\Delta = \frac{c^0 \cos. \phi^0 + \Delta^0}{1 + c^0},$$

$$2 \sin. \phi \cos. \phi = \sin. \phi^0 (c^0 \cos \phi^0 + \Delta^0),$$

ensuite la valeur de $2 \sin.^2 \phi$ différentiée, donne

$$4 \sin. \phi \cos. \phi \, d\phi = \frac{d\varphi^0 \sin. \phi^0}{\Delta^0} (c^0 \cos. \phi^0 + \Delta^0)^2 ;$$

divisant cette équation par la précédente, on a

$$2 d\phi = \frac{d\varphi^0}{\Delta^0} (c^0 \cos. \phi^0 + \Delta^0).$$

Donc enfin

$$\frac{d\phi}{\Delta} = \frac{1 + c^0}{2} \cdot \frac{d\phi^0}{\Delta^0},$$

et en intégrant $\int \frac{d\phi}{\Delta} = \frac{1 + c^0}{2} \int \frac{d\phi^0}{\Delta^0}$ ou simplement $F = \frac{1 + c^0}{2} F^0$, F^0 représentant la nouvelle fonction elliptique $\int \frac{d\phi^0}{\Delta^0}$.

Il est évident que par cette substitution, qui donne un résultat très-simple, on réduit la détermination de la fonction F à celle de la fonction F^0, plus facile à évaluer, puisque c^0 est plus petit que c ; et remarquez bien que nous n'avons recours ici qu'à une nouvelle fonction, et non pas à deux, comme dans les arcs d'ellipse, ce qui est beaucoup plus simple.

simple. Il reste à déterminer ϕ^0 par le moyen de ϕ : or la relation supposée entre ces deux angles donne

$$\sin.\,\phi^0 = \frac{(1+b)\,\sin.\,\phi\,\cos.\,\phi}{\Delta},$$

$$\cos.\,\phi^0 = \frac{1-(1+b)\,\sin.^2\phi}{\Delta},$$

$$\text{tang.}\,\phi^0 = \frac{(1+b)\,\text{tang.}\,\phi}{1-b\,\text{tang.}^2\phi}.$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme très-simple

$$\text{tang.}\,(\phi^0 - \phi) = b\,\text{tang.}\,\phi.$$

Supposons donc qu'après avoir déterminé les modules décroissans c^0, c^{00}, etc. ainsi que leurs compléments, b^0, b^{00}, etc., comme il a été dit dans l'article précédent, on calcule successivement les amplitudes ϕ^0, ϕ^{00}, ϕ^{000}, etc. par les formules

$$\text{tang.}\,(\phi^0 - \phi) = b\,\text{tang.}\,\phi,$$
$$\text{tang.}\,(\phi^{00} - \phi^0) = b^0\,\text{tang.}\,\phi^0,$$
$$\text{tang.}\,(\phi^{000} - \phi^{00}) = b^{00}\,\text{tang.}\,\phi^{00},$$
$$\text{etc.}$$

ce qu'on pourroit faire aussi par les suites

$$\phi^0 = 2\phi - c^0 \sin.2\phi + \tfrac{1}{2}c^{0^2}\sin.4\phi - \tfrac{1}{3}c^{0^3}\sin.6\phi + \text{etc.}$$
$$\phi^{00} = 2\phi^0 - c^{00}\sin.2\phi^0 + \tfrac{1}{2}c^{00^2}\sin.4\phi^0 - \tfrac{1}{3}c^{00^3}\sin.6\phi^0 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Alors l'intégrale $\int \frac{d\phi}{\Delta}$ ou la fonction F s'exprimera ainsi :

$$F = \frac{1+c^0}{2}\,F^0,$$

$$F = \frac{1+c^0}{2}\cdot\frac{1+c^{00}}{2}\,F^{00},$$

$$F = \frac{1+c^0}{2}\cdot\frac{1+c^{00}}{2}\cdot\frac{1+c^{000}}{2}\,F^{000},$$

$$\text{etc.}$$

Mais lorsque c est devenu très-petit, on a $\Delta = 1$ et $\int \frac{d\varphi}{\Delta} = \phi$.

Soit donc Φ la limite des angles ϕ, $\frac{\phi^{\circ}}{2}$, $\frac{\phi^{\circ\circ}}{4}$, $\frac{\phi^{\circ\circ\circ}}{8}$, etc., limite qu'ils atteindront toujours sensiblement au bout d'un petit nombre de termes, et on aura,

$$F = \Phi (1 + c^{\circ})(1 + c^{\circ\circ})(1 + c^{\circ\circ\circ}), \text{ etc.}$$

Lorsque $\phi = 90^{\circ} = \frac{1}{2}\pi$, la limite Φ est pareillement $\frac{1}{2}\pi$, de sorte que la valeur de F qui est alors F 1, devient

$$F\,1 = \frac{\pi}{2}(1 + c^{\circ})(1 + c^{\circ\circ})(1 + c^{\circ\circ\circ}), \text{ etc.}$$

Le produit constant $(1 + c^{\circ})(1 + c^{\circ\circ})$, etc. que nous appellerons α, peut aussi se représenter par l'expression :

$$\alpha = \frac{2\sqrt{c^{\circ}}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ}}}{c^{\circ}} \cdot \frac{2\sqrt{c^{\circ\circ\circ}}}{c^{\circ\circ}}, \text{ etc.}$$

et sous cette forme il est aisé à calculer par les tables de logarithmes. α étant connu, on aura en général $F = \alpha\,\Phi$ et $F_1 = \alpha \cdot \frac{1}{2}\pi$.

(28). C'est sur-tout dans les applications qu'on reconnoîtra combien ces approximations sont promptes. Pour les faciliter le plus qu'il est possible, observons que si on fait $c = \sin.\mu$, on a $b = \cos.\mu$, et $c^{\circ} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\mu$, d'où l'on voit que c° se déduira facilement de c, au moyen de la table des sinus. Faisant de même $c^{\circ} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\mu = \sin.\mu^{\circ}$, ce qui détermine un nouvel angle μ°, on aura $c^{\circ\circ} = \text{tang.}^2 \frac{1}{2}\mu^{\circ}$, et ainsi de suite. Lorsqu'on sera parvenu à un c fort petit, pour avoir le suivant, que je représente par c°, on pourra, pour éviter les angles trop petits, se servir de la formule

$$c^{\circ} = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1.3}{4.6}c^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}c^6 + \text{etc.}$$

dont le premier terme, ou tout au plus les deux premiers, suffiront. Quant au calcul des angles ϕ°, $\phi^{\circ\circ}$, etc. nous n'avons rien à ajouter à la simplicité de la formule $\text{tang.}(\phi^{\circ} - \phi) = b\,\text{tang.}\,\phi$, qui est très-propre pour le calcul trigonométrique, nous observerons seulement que l'angle $\phi^{\circ} - \phi$, ainsi déter-

miné par sa tangente, est presque égal à l'angle ϕ, lorsque c est déja très-petit ; car on a sans ambiguité

$$\phi^0 = 2\phi - c^0 \sin. 2\phi + \tfrac{1}{2} c^{0^2} \sin. 4\phi - \tfrac{1}{3} c^{0^3} \sin. 6\phi + \text{etc.}$$

Il faudra donc prendre pour la valeur de $\phi^0 - \phi$, non pas toujours le plus petit angle que donnent les tables des sinus, mais celui qui approche beaucoup de ϕ, et qui peut être de plusieurs circonférences. Un exemple fera voir que là-dessus il n'y aura jamais ni difficulté ni ambiguité.

EXEMPLE.

On demande la valeur de la fonction F, lorsque $c = \tfrac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ et tang. $\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Nous choisissons exprès un cas qui est peu favorable pour le calcul, parce que la valeur de c diffère peu de l'unité.

Voici d'abord un tableau qui offre le calcul des c^0, c^{00}, b^0, b^{00}, etc. fait suivant ce qui vient d'être dit.

Valeurs des c et b.						Leurs logarithmes.
c	=	sin.	75°	0′	0″	9,9849438.
b	=	cos.	75	0	0	9,4129962.
c^0	=	tang.²	37	30	0	9,7699610.
		sin.	36	4	7,47	
b^0	=	cos.	36	4	7,47	9,9075648.
c^{00}	=	tang.²	18	2	3,735	9,0250880.
		sin.	6	5	9,36	
b^{00}	=	cos.	6	5	9,36	9,9975454.
c^{000}	=	tang.²	3	2	34,68	7,4511672.
		sin.	0	9	42,90	
b^{000}	=	cos.	0	9	42,90	9,9999983.
c^{0000}	=	$\frac{1}{4}(c^{000})^2$				4,3002761.
b^{0000}						0,0000000.

Ces logarithmes donneront aisément la valeur du produit $\alpha = \frac{2\sqrt{c'}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c''}}{c'}$, etc., pour lequel il suffira d'employer quatre facteurs, et on aura log. $\alpha = 0{,}2460561$, ou $\alpha = 1{,}7622037$; de là résulte d'abord $F1 = \frac{\pi}{2} \cdot \alpha = 2{,}7680632$. On trouvera ensuite

$$\begin{aligned}
\phi &= 47^\circ\ 3'\ 30'',96.\\
\phi' &= 62\ 36\ 3\ ,12.\\
\phi'' &= 119\ 55\ 47\ ,69.\\
\phi''' &= 240\ 0\ 0\ ,18.\\
\phi'''' &= 480\ 0\ 0\ ,00.
\end{aligned}$$

etc.

Les autres valeurs de ϕ augmenteroient en raison double, d'où il suit que la limite des angles ϕ, $\frac{\phi'}{2}$, $\frac{\phi''}{4}$, etc. est 30° ou $\frac{\pi}{6}$, et ainsi on a $F = \frac{\pi}{6}\alpha = 0{,}9226877$, comme dans l'art. 20.

Remarquons que, puisque la limite $\phi = 30^\circ = \frac{1}{3}\,90^\circ$, on a $F = \frac{1}{3} F1$; cette égalité est au moins approchée, puisque le calcul la donne ainsi ; mais il est facile de s'assurer qu'elle est rigoureuse. En effet, on a vu dans l'art. 18 que l'équation à résoudre pour faire ensorte que $F(\phi) = \frac{1}{3} F1$, est

$$0 = 1 - 2\sin.\phi + 2c^2 \sin.^3\phi - c^2 \sin.^4\phi ;$$

or dans le cas présent où $c^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$, on trouvera $\sin.\phi = \sqrt{3} - 1$, ou $\tang.\phi = \sqrt{(\frac{2}{\sqrt{3}})}$; donc en effet la fonction F est exactement le tiers de $F(90^\circ)$ ou F1.

(29) Etant donnée la valeur de ϕ, on voit qu'il est facile de déterminer la fonction F avec toute l'exactitude nécessaire ; réciproquement il peut être utile de déterminer l'amplitude ϕ en supposant connue la valeur de la fonction F,

soit toujours α le produit $(1+c^{0})(1+c^{00})$, etc., et Φ la limite des angles ϕ, $\frac{\varphi^{0}}{2}$, $\frac{\varphi^{00}}{4}$, etc.; puisqu'on a $F = \alpha\Phi$, il en résulte $\Phi = \frac{F}{\alpha}$, ainsi la limite Φ est connue. Supposons qu'on ait calculé les valeurs de c^{0}, c^{00}, etc. jusqu'à un terme assez petit pour être négligé, et soit, par exemple, ce terme c^{00000}, ou pour abréger c^{05}. Puisqu'on a $\varphi^{05} = 2\varphi^{04} - c^{05}\sin. 2\varphi^{04} +$, etc., on aura d'une manière suffisamment exacte $\varphi^{05} = 2\varphi^{04}$, et à plus forte raison $\varphi^{06} = 2\varphi^{05}$, etc. Donc la limite Φ sera égale à $\frac{1}{16}\varphi^{04}$, ou bien on aura $\varphi^{0000} = 16\Phi$. Ce dernier φ étant connu, on remontera aux premiers par les équations successives

$$\sin.(2\varphi^{0000} - \varphi^{0000}) = c^{0000}\sin.\varphi^{0000},$$
$$\sin.(2\varphi^{000} - \varphi^{000}) = c^{000}\sin.\varphi^{000},$$
$$\sin.(2\varphi^{00} - \varphi^{00}) = c^{00}\sin.\varphi^{00},$$
$$\sin.(2\varphi^{0} - \varphi^{0}) = c^{0}\sin.\varphi^{0},$$

Équations qui sont toutes de la même forme, et dont la dernière se conclut de l'equation $\text{tang}.(\varphi^{0} - \varphi) = b\,\text{tang}.\varphi$.

Ceci s'applique particulièrement à la résolution de l'équation $F(\varphi n) = nF(\varphi)$, quelque soit n. Etant donné φ on connoîtra $F(\varphi)$ et $nF(\varphi)$; donc $F(\varphi n)$ sera connu, et de là on tirera φn comme on vient de l'expliquer. Ce moyen n'exigera jamais qu'un petit nombre d'opérations, au lieu que si n étoit un peu grand, ou seulement fractionnaire, les méthodes que nous avons données pour déterminer φn deviendroient très-longues, ou même impraticables, ainsi la méthode actuelle sera presque toujours préférable.

Approximations pour les fonctions elliptiques de la seconde espèce.

(30). La formule de ces fonctions est

$$G = \int (A + B\sin.^{2}\varphi)\frac{d\varphi}{\Delta};$$

si on fait les mêmes substitutions que dans l'article 27, et qu'on prenne

$$A^\circ = A + \frac{B}{2}, \quad B^\circ = \frac{B c^\circ}{2},$$

on aura la transformée

$$G = \frac{1 + c^\circ}{2}\left(-\frac{B}{2}\sin.\phi^\circ + G^\circ\right),$$

G° étant mis à la place de $\int (A^\circ + B^\circ \sin.^2\phi^\circ)\frac{d\phi^\circ}{\Delta^\circ}$. On auroit semblablement par de nouvelles transformations :

$$G^\circ = \frac{1 + c^{\circ\circ}}{2}\left(-\frac{B^\circ}{2}\sin.\phi^{\circ\circ} + G^{\circ\circ}\right)$$

$$G^{\circ\circ} = \frac{1 + c^{\circ\circ\circ}}{2}\left(-\frac{B^{\circ\circ}}{2}\sin.\phi^{\circ\circ\circ} + G^{\circ\circ\circ}\right)$$

etc.

Ainsi la formule intégrale G se ramène aisément à celle qu'on voudra des transformées successives G°, $G^{\circ\circ}$, etc. Supposons que cette suite soit continuée jusqu'à un terme G^μ très-éloigné; alors on aura $c^\mu = 0$, $\Delta^\mu = 1$, et d'abord la valeur de G^μ se réduit à $\int (A^\mu + B^\mu \sin.^2\phi^\mu)\, d\phi^\mu$. Observons ensuite que nous avons $B^\circ = \frac{Bc^\circ}{2}$, et semblablement $B^{\circ\circ} = \frac{B^\circ c^{\circ\circ}}{2}$, $B^{\circ\circ\circ} = \frac{B^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ}}{2}$; donc la suite B°, $B^{\circ\circ}$, etc. décroît plus rapidement que la suite c°, $c^{\circ\circ}$, etc., et ainsi on peut faire en toute sureté $B^\mu = 0$. A l'égard de A^μ, puisqu'on a $A^\circ = A + \frac{1}{2}B$, $A^{\circ\circ} = A^\circ + \frac{1}{2}B^\circ$, etc., il en résulte

$$A^\mu = A + \frac{B}{2} + \frac{Bc^\circ}{4} + \frac{Bc^\circ c^{\circ\circ}}{8} + \frac{Bc^\circ c^{\circ\circ} c^{\circ\circ\circ}}{16} + \text{etc.}$$

Enfin si on appelle, comme ci-dessus, ϕ la limite des angles

ϕ, $\frac{\phi^0}{2}$, $\frac{\phi^{00}}{4}$, etc., on aura $\Phi = \frac{\phi^\mu}{2^\mu}$, ou $\phi^\mu = 2^\mu \Phi$. Donc la valeur de G^μ sera

$$G^\mu = 2^\mu \Phi \left(A + \frac{B}{2} + \frac{Bc^0}{4} + \frac{Bc^0 c^{00}}{8} + \text{etc.}\right)$$

Maintenant il est aisé de voir que la valeur de G sera composée de deux parties, l'une $= \alpha \Phi$, en supposant

$$\alpha = \left(A + \frac{B}{2} + \frac{B c^0}{4} + \frac{B c^0 c^{00}}{8} + \text{etc.}\right)(1 + c^0)(1 + c^{00})\text{etc.},$$

l'autre algébrique ou périodique; savoir:

$$-\left(\frac{1+c^0}{2}\right).\frac{B}{2}\sin.\phi^0 - \left(\frac{1+c^0}{2}\right)\left(\frac{1+c^{00}}{2}\right)\frac{Bc^0}{4}\sin.\phi^{00} - \text{etc.}$$

Mais à cause de $1 + c^0 = \frac{2\sqrt{c^0}}{c}$, $1 + c^{00} = \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0}$, etc. cette seconde partie peut se mettre sous la forme $-\frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c^0}}{2}\sin.\phi^0 + \frac{\sqrt{c^0 c^{00}}}{4}\sin.\phi^{00}\right.$, etc. Donc la valeur complète de G sera

$$G = \alpha \Phi - \frac{B}{c}\left(\frac{\sqrt{c^0}}{2}\sin.\phi^0 + \frac{\sqrt{c^0 c^{00}}}{4}\sin.\phi^{00} + \frac{\sqrt{c^0 c^{00} c^{000}}}{8}\sin.\phi^{000} + \text{etc.}\right)$$

Et dans le cas où $\phi = 90^0$, on aura simplement $G\,1 = \alpha.\frac{\pi}{2}$.

Dans les applications il suffira toujours de prendre un très-petit nombre de termes de ces suites, et les termes omis feront connoître à quel degré d'approximation on s'est arrêté.

(31). Ces formules s'appliquent immédiatement à la rectification de l'ellipse. Soit toujours 1 le demi-grand axe, c l'excentricité; considérons l'arc E, dont l'origine est au petit axe, et dont l'extrémité est déterminée par l'ordonnée au grand axe $b\sin.\phi$, et l'abscisse $\cos.\phi$, cet arc sera égal à l'intégrale $\int d\phi \sqrt{(1 - c^2\sin.^2\phi)}$; ainsi en faisant $A = 1$

et $B = -c^2$, on aura $G = E$; d'où il suit que le quart d'ellipse peut s'exprimer par cette suite très-convergente

$$E_1 = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{c^2}{2} - \frac{c^2 c^0}{4} - \frac{c^2 c^0 c^{00}}{8} - \text{etc.}\right)(1+c^0)(1+c^{00}),\text{etc.}$$

La rectification de l'hyperbole est comprise dans les mêmes formules. Soit c le demi-axe transverse, b son conjugué, ι l'excentricité; soit b^2 tang. ϕ une ordonnée à l'axe transverse, et Υ l'arc d'hyperbole compris depuis le sommet de la courbe jusqu'à cette ordonnée, on aura $\Upsilon = \int \frac{b^2 d\phi}{\Delta \cos.^2 \phi} = \Delta$ tang. $\phi - \int \frac{c^2 d\phi \cos.^2 \phi}{\Delta}$. Cette dernière intégrale, comparée à la formule G donne $A = c^2$, et $B = -c^2$, et ainsi on aura

$$\Upsilon = \Delta \text{ tang. } \phi - G.$$

D'où il s'ensuit que la différence entre l'arc infini d'hyperbole et son asymptote, est égale à G_1, et a pour valeur

$$\frac{\pi}{4} c^2\left(1 - \frac{c^0}{2} - \frac{c^0 c^{00}}{4} - \frac{c^0 c^{00} c^{000}}{8}, \text{etc.}\right)(1+c^0)(1+c^{00})(1+c^{000}),\text{etc.}$$

Il ne paroît pas qu'on puisse trouver rien de plus simple pour la rectification des sections coniques.

(32) Jettons maintenant un coup d'œil sur les rapports qui existent entre ces diverses transcendantes; savoir $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, $E = \int \Delta d\phi$, et en général $G = \int (A + B \sin.^2 \phi) \frac{d\phi}{\Delta}$. D'abord puisque $\sin.^2 \phi = \frac{1 - \Delta'}{c^2}$, il est clair qu'on aura $G = (A + \frac{B}{c^2})F - \frac{B}{c^2} E$, et ainsi G se déterminera par le moyen de F et de E. Mais on a pareillement $G^0 = (A^0 + \frac{B^0}{c^{00}}) F^0 - \frac{B^0}{c^{00}} E^0$: ces valeurs étant substituées dans l'équation entre G et G^0 (art. 30), où l'on aura soin de remettre les valeurs de A^0 et B^0 en A et B, il en résultera une nouvelle équation, qui

qui aura lieu quels que soient A et B. Cette équation en donnera deux autres, l'une $F = \frac{1+c^\circ}{2} F^\circ$, que l'on connoît déja, l'autre

$$b F = -E + \frac{1+b}{2} E^\circ + \frac{1-b}{2} \sin. \phi^\circ.$$

Celle-ci fait voir que la fonction F de la première espèce peut s'exprimer par les deux arcs d'ellipses E, E°. Il en est donc de même de la fonction G en général et de l'arc d'hyperbole Y en particulier. On a aussi par la même raison

$$b^\circ F^\circ = -E^\circ + \frac{1+b^\circ}{2} E^{\circ\circ} + \frac{1-b^\circ}{2} \sin. \phi^{\circ\circ}.$$

De ces deux équations on peut éliminer F et F°, puisqu'on a d'ailleurs $F = \frac{1+c^\circ}{2} F^\circ$, et il en résultera cette relation entre les trois arcs E, E°, $E^{\circ\circ}$, pris sur trois ellipses consécutives d'une même suite :

$$(1+c^\circ) E = c^\circ \sin. \varphi^\circ - \frac{b^\circ(1-b^\circ)}{4} \sin. \varphi^{\circ\circ} + \left(1+\frac{b^\circ}{2}\right) E^\circ - \frac{b^\circ(1+b^\circ)}{4} E^{\circ\circ}{}_1$$

Dans le cas où $\phi = 90^\circ$, on a $\phi^\circ = 180^\circ$, $\phi^{\circ\circ} = 360^\circ$, et cette formule devient

$$(1+c^\circ) E_1 = (2+b^\circ) E^\circ{}_1 - b^\circ(1+b^\circ) E^{\circ\circ}{}_1 ;$$

d'où il suit que le quart d'ellipse E_1 se détermine par deux autres quarts d'ellipse E°, $E^{\circ\circ}$, dont les excentricités sont moindres ; et en général il résulte de ces formules que dans la suite d'ellipses formée d'après les excentricités c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc., la rectification d'une ellipse quelconque se ramenera toujours à la rectification de deux autres à volonté. On trouve ces conséquences plus développées dans les Mémoires de l'Académie de 178[illegible] ; mais il n'en résulte pas une méthode d'approximation aussi simple que celle qui a été exposée dans l'art. 30.

Développement particulier de la formule

$$Z = \int \frac{(f+gx^2)\,dx}{\sqrt{(a^2+2ab\,x^2\cos.\theta+b^2x^4)}}.$$

(33). Cette formule se rencontre assez souvent dans les applications, et d'ailleurs il est nécessaire d'examiner particulièrement le cas des facteurs imaginaires dont nous avons parlé (art. 7).

La variable x est susceptible de toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini; mais comme en faisant $x=\infty$, on a $Z=\int \frac{g}{c}\,dx=\frac{g}{c}\,x$; pour nous débarasser du terme qui peut devenir infini, nous considérerons simplement la formule

$$X=\int\left\{\frac{(f+gx^2)\,dx}{\sqrt{(a^2+2ab\,x^2\cos.\theta+b^2x^4)}}-\frac{g}{c}\,dx\right\},$$

qui par ce moyen aura toujours une valeur finie.

Il s'agit maintenant de transformer cette expression de manière que les facteurs binomes de la quantité sous le radical deviennent réels. Pour cela on peut faire différentes suppositions, qui toutes réussiront également. Par exemple,

$$x=\frac{1-y}{1+y}\cdot\sqrt{\frac{a}{c}},$$

$$\sqrt{(a^2+2ab\,x^2\cos.\theta+b^2x^4)}=2xy\sqrt{ab},$$

$$a+bx^2=2xy\sqrt{ab},$$

$$bx^2+a\cos.\theta+\sqrt{(a^2+2ab\,x^2\cos.\theta+b^2x^4)}=2ay^2.$$

Bornons-nous à présenter le résultat de la quatrième supposition; elle donne $x^2=\frac{a}{c}\left(y^2-\cos.\theta-\frac{\sin.^2\theta}{4y^2}\right)$, et

$$X=\int\frac{\frac{dy}{\sqrt{ac}}\left(f-\frac{ga}{b}\cos.\theta-\frac{ga\sin.^2\theta}{2by^2}\right)}{\sqrt{\left(y^2-\cos.^2\frac{1}{2}\theta\right)\left(y^2+\sin.^2\frac{1}{2}\theta\right)}}$$

où l'on voit qu'en effet les deux facteurs de la quantité sous le radical sont réels. On voit aussi que la moindre valeur de y étant $\cos.\frac{1}{2}\theta$, on peut faire $y=\frac{\cos.\frac{1}{2}\theta}{\cos.\varphi}$, et il en résultera, en posant $\sin.\frac{1}{2}\theta=c$,

$$X=\int\frac{fG-g\alpha+2g\alpha c^2\sin.^2\phi}{G\sqrt{G\alpha}}\cdot\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$$

Par cette transformation la formule X devient une fonction elliptique de la seconde espèce, à laquelle on peut immédiatement appliquer les formules de l'art. 30, en faisant

$$A=\frac{fG-g\alpha}{G\sqrt{\alpha G}},\quad B=\frac{2g\alpha c^2}{G\sqrt{\alpha G}}.$$

Remarquez que nous supposons $\sqrt{\alpha G}$ réelle; car on peut toujours prendre α et G positifs, et si le terme $2\alpha G x^2\cos.\theta$ doit être négatif, on fera tomber le signe — sur $\cos.\theta$.

La relation immédiate entre ϕ et x est donnée par l'équation,

$$2\alpha\sin.^2\tfrac{1}{2}\theta\cos.^2\phi=-Gx^2-\alpha\cos.\theta+\sqrt{(\alpha^2+2\alpha Gx^2\cos.\theta+G^2x^4)},$$

d'où l'on voit que lorsque $x=0$, $\phi=0$, et lorsque $x=\infty$, $\phi=90^\circ$. La transformée en ϕ représente donc l'intégrale X, prise depuis $x=0$ jusqu'à la valeur de x qui correspond à ϕ.

On peut exprimer l'intégrale X par le moyen des deux formules simples $F=\int\frac{d\phi}{\Delta}$, $E=\int\Delta d\phi$, et on aura de cette manière

$$X=\frac{fG+g\alpha}{G\sqrt{\alpha G}}F-\frac{2g\alpha}{G\sqrt{\alpha G}}E.$$

Voici quelques applications de cette dernière formule, qui conduiront à des résultats assez remarquables.

EXEMPLE Ier.

(34). Soit proposé d'évaluer les deux intégrales $M=\int\frac{z^{-\frac{2}{3}}dz}{\sqrt{(1-z^3)}}$, $N=\int\frac{z^{\frac{1}{3}}dz}{\sqrt{(1-z^3)}}$, prises l'une et l'autre depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$. On sait que le produit de ces deux intégrales $=\frac{1}{3}\pi$, (*Voyez les Mém. de* 1786, *pag.* 678).

Si on fait dans la première $z=(1+x^2)^{-\frac{1}{3}}$, on aura la transformée $M=\int\frac{3dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=\infty$. La comparaison avec la formule X donnera $f=3$, $g=0$, $\alpha=\sqrt{3}$, $6=1$, cos $\theta=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c=\sin.\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; d'où résulte $M=\frac{3}{\sqrt[4]{3}}F$, et comme l'intégrale doit être prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=\infty$, ou depuis $\phi=0$ jusqu'à $\phi=90^\circ$, F deviendra F 1, et l'intégrale totale sera $M=\frac{3}{\sqrt[4]{3}}F1$.

Dans la seconde formule nous ferons $z=(1-x^2)^{\frac{1}{3}}$, et la transformée sera $N=\int\frac{3dx(1-x^3)}{\sqrt{(3-3x^3+x^6)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Cette formule étant comparée à la formule X, on aura $f=3$, $g=-3$, $\alpha=\sqrt{3}$, $6=1$, cos. $\theta=-\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c=\sin.\frac{1}{2}\theta=\frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, ce qui donnera

$$N=-3x+\frac{3-3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F(\phi)+\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E(\phi):$$

or la relation entre ϕ et x étant

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\cos.^2\phi=-x^2+\frac{1}{2}+\sqrt{(3-3x^2+x^4)},$$

si on fait $x=1$, on aura $\cos.^2\phi=2\sqrt{3}-3$, ou bien tang. $\phi=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Mais nous avons déja vu (art. 28) que dans

le cas où $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$ et tang. $\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$; on a exactement $F(\phi) = \frac{1}{2}F1$. De là il est aisé de conclure par les formules de l'art. 22, qu'on a $E(\phi) = \frac{1}{2}E1 + \frac{1}{2\sqrt[4]{3}}$, donc l'intégrale N prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$, se réduit à cette valeur :

$$N = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F1 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E1.$$

Il faut bien remarquer que ces valeurs de F 1 et E 1 répondent à un module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, tandis que la valeur de F 1 qui entre dans M répond à un module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$. Pour distinguer ce dernier module, nous le désignerons par k, et la valeur correspondante de F 1 par F 1 k. Ainsi nous aurons par le produit des deux intégrales, l'équation

$$\frac{1}{2}\pi = \frac{3}{\sqrt[4]{3}}F1\,k.\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}F1 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}E1\right\},$$

d'où il suit que dans ce cas particulier l'arc d'ellipse E 1, qui est une fonction de la seconde espèce, peut s'exprimer par F 1 et F 1 k, fonctions de la première. Ces calculs sont faits d'une autre manière dans le Mémoire cité, et nous n'en avons tiré alors aucun résultat, faute d'appercevoir que l'arc E peut se déterminer par le tiers de E 1. On rencontrera encore quelque chose de semblable dans l'exemple suivant.

EXEMPLE II.

(35). On propose d'évaluer les deux intégrales $P = \int \frac{z^{-\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, $Q = \int \frac{z^{\frac{1}{2}}dz}{\sqrt{(1-zz)}}$, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$: on sait que leur produit doit être $\frac{1}{2}\pi$.

Si on fait dans la première $z = (1-x^3)^{\frac{1}{2}}$, on aura la transformée $P = \int \frac{3dx}{\sqrt{(3-3x^3+x^6)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 0$

jusqu'à $x = 1$. Celle-ci étant comparée à la formule X, on a $f = 3, g = 0, \alpha = \sqrt{3}, 6 = 1, \cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, ce qui donne $P = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} F(\phi)$. Quant à la valeur de ϕ, elle se tire de l'équation $\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\cos.^2\phi = -x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{(3 - 3x^2 + x^4)}$, dans laquelle, si on fait $x = 1$, on aura $\cos.^2\phi = 2\sqrt{3} - 3$, ou tang. $\phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Ce cas étant celui que nous avons déja rencontré, on en conclura de même $F(\phi) = \frac{1}{3} F 1$, et par conséquent $P = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} F 1$.

Venons à la formule Q, et faisons d'abord $x^2 = y^{-3}$, on aura la transformée $Q = \frac{1}{4}\int \frac{dy}{y\sqrt{(y^3-1)}}$, à intégrer depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$. Intégrant par parties, on aura

$$Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(y^3-1)}}{y} - \frac{1}{4}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^3-1)}}.$$

Soit ensuite $y = 1 + x^2$, et on aura $\frac{1}{4}\int \frac{y\,dy}{\sqrt{(y^3-1)}} = \frac{1}{2}\int \frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}}$, formule qu'il faut intégrer depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \infty$. Cela posé, la valeur de Q peut se mettre sous cette forme

$$Q = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{(y^3-1)}}{y} - \frac{1}{2}x$$
$$-\frac{1}{2}\int\left\{\frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} - dx\right\};$$

mais la partie hors du signe $\int$ s'évanouit au commencement et à la fin de l'intégrale : ainsi on a simplement

$$Q = -\frac{1}{2}\int\left\{\frac{(1+x^2)\,dx}{\sqrt{(3+3x^2+x^4)}} - dx.\right\}$$

Comparant avec la formule X, on aura $f = -\frac{1}{2}$, $g = -\frac{0}{2}$, $\alpha = \sqrt{3}, 6 = 1$, cos. $\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, et comme

l'intégrale doit être prise depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90°$, on aura pour résultat (en distinguant ce second c par k),

$$Q = -\left(\frac{3+3\sqrt{3}}{2\sqrt[4]{3}}\right) F\,1\,k + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} E\,1\,k.$$

Maintenant puisqu'on sait que $PQ = \frac{1}{2}\pi$, cette égalité et celle qu'on a obtenue semblablement dans l'exemple précédent, donneront ces deux résultats,

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\pi}{4} &= F\,1\,(E\,1\,k - (\tfrac{3+\sqrt{3}}{6})\,E\,1\,k) \\ \tfrac{\pi}{4} &= F\,1\,k\,(E\,1 - (\tfrac{3-\sqrt{3}}{6})\,F\,1\,) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (b').$$

On peut donc dans ce cas exprimer les quarts d'ellipse $E\,1$, $E\,1\,k$, qui sont des fonctions de la seconde espèce, par $F\,1$, $F\,1\,k$, fonctions de la première; et la même chose a lieu par conséquent pour toutes les ellipses dont les excentricités sont comprises, soit dans la suite c, c^{0}, c^{00}, etc, soit dans la suite k, k^{0}, k^{00}, etc., lesquelles suites peuvent aussi être prolongées à l'infini dans l'autre sens. A ces relations, on peut encore joindre celle de $F\,1 = \sqrt{3}\,F\,1\,k$, qui va être démontrée dans l'exemple suivant.

EXEMPLE III.

(36). Soit proposé d'intégrer la formule $R = \int \frac{dz}{(1-z^3)^{\frac{2}{3}}}$ depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.

On fera d'abord $1 - z^3 = (\frac{z}{y})^3$, ce qui donnera $R = \int \frac{dy}{\sqrt{(4y^3+1)}}$, à intégrer depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$. Soit ensuite $m = \sqrt[3]{4}$ et $my = x^3 - 1$, on aura la transformée $R = \frac{2}{m}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^3-3x+3)}}$, qu'il faut intégrer depuis $x = 1$ jusqu'à $x = \infty$. Cette intégrale se déduit facilement de la valeur de P dans l'exemple précédent, et on en

tirera $R = \frac{4}{3m\sqrt[4]{3}} F\,1$, le module de F 1 étant toujours $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$. Mais il y a une autre manière de trouver la valeur de R.

Soit $1 - x^3 = \left(1 - \frac{x}{y}\right)^3$, on trouvera d'abord la transformée $R = \int \frac{dy\sqrt{3}}{\sqrt{(4y^3-1)}}$, qu'il faut intégrer depuis $y = 1$ jusqu'à $y = \infty$. Soit ensuite $m^3 = 4$ et $my = 1 + x^3$, on aura $R = \frac{2\sqrt{3}}{m}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^4+3x^2+3)}}$, nouvelle formule qu'il faut intégrer depuis $x = \sqrt{(m-1)}$, jusqu'à $x = \infty$. Or, en comparant à la formule X, on a $f = 1$, $g = 0$, $\alpha = 1$, $6 = \sqrt{3}$, $\cos.\theta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, et $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; de plus, lorsque $x^2 = 2m - 1$, on a $\cos.^2\phi = \frac{-m-\frac{1}{2}+\sqrt{m^2+m+1}}{\sqrt{3}-\frac{3}{2}} = \frac{(m-1)^2}{2\sqrt{3}-3}$. Or, on trouvera par la trisection (art. 18) que cette valeur de ϕ répond à une fonction $F = \frac{1}{3} F\,1$, d'où il suit que la fonction F, prise depuis cette valeur de ϕ jusqu'à celle de 90°, où l'on a $x = \infty$, sera $F - \frac{1}{3} F\,1$. D'ailleurs cet F 1 doit être désigné par F 1 k, puisque le module est ici $k = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$; donc on aura $R = \frac{2\sqrt{3}}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{1}{3} F\,1\,k$. Comparant cette valeur avec celle que nous avons trouvée par l'autre méthode, on aura cette relation très-simple,

$$F\,1 = \sqrt{3}.\ F\,1\,k,$$

laquelle jointe aux deux équations (b'), fait voir qu'une seule des quatre quantités F 1, F 1 k, E 1, E 1 k étant connue, on peut déterminer les trois autres. On aura par exemple,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{4} = F\,1\left\{E\,1 - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) F\,1\right\}$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{3}} = F\,1\,k\left\{E\,1\,k - \left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) F\,1\,k\right\}.$$

On voit aussi qu'une seule ellipse connue dans les deux suites

suites formées d'après les excentricités c et k, suffit pour déterminer toutes les autres.

Nous insistons sur ces comparaisons, parce qu'il paroît qu'il y a très-peu de cas où elles ont lieu, et où l'on puisse déduire E de F; ici il y a un double rapport entre les E et F d'une suite, et ceux d'une autre suite, formée d'après un autre module, ce qui est encore plus rare et plus remarquable.

Au reste, comme on pouvoit intégrer indéfiniment la formule R par l'une et par l'autre méthode, on voit que la fonction F, pour le module $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, se déduira toujours d'une fonction pareille pour le module $k = \frac{1}{2}\sqrt{(2-\sqrt{3})}$, en prenant les amplitudes convenables, et il en seroit de même des ellipses dont c et k sont les excentricités. Ces ellipses entreroient dans l'intégration de la formule $\int \frac{x^2 dx}{(1-x^4)^{\frac{1}{2}}}$, qu'on peut effectuer par les deux mêmes méthodes que celle de la formule R; et ainsi nous connoissons deux suites infinies d'ellipses, telles que la rectification indéfinie d'une seule de ces ellipses donne celle de toutes les autres. Ces réductions tiennent à la nature particulière du radical $\sqrt{(x^4-3x^2+3)}$, qui est susceptible de se changer en $\sqrt{(x^4+3x^2+3)}$, mais il ne paroit pas que de telles réductions soient toujours praticables.

Théoréme sur les fonctions définies dont les modules sont complément l'un de l'autre.

(37). Dans les comparaisons qu'on vient d'établir, les modules c et k sont tels que $k^2 = 1-c^2$, ou que $k = b$, et ainsi ils sont complément l'un de l'autre. Si on met b à la place de k, pour mieux se représenter le rapport des fonctions $E\,1\,b$, $F\,1\,b$ aux fonctions $E\,1$, $F\,1$, qu'on peut aussi désigner par $E\,1\,c$, $F\,1\,c$, les équations (b') étant ajoutées ensemble donneront

$$\frac{\pi}{2} = F\,1\,c\,E\,1\,b + F\,1\,b\,E\,1\,c - F\,1\,b\,F\,1\,c \ldots . (c')$$

Cette équation est démontrée pour le cas de $c = \frac{1}{2}\sqrt{(2+\sqrt{3})}$; elle l'est aussi pour le cas de $c = \sqrt{\frac{1}{2}}$, car on auroit alors $b = c$, et elle deviendroit

$$\frac{\pi}{2} = F1\,(2E1 - F1) :$$

Or celle-ci se trouve exprimée en d'autres termes dans les Mémoires de 1786, page 678. Mais ces cas ne sont que particuliers, et nous allons prouver que l'équation (c') a lieu en général quelque soit c, ce qui est un théorême nouveau et remarquable sur les intégrales définies.

Pour abréger la notation, ôtons les 1 qui indiquent que les fonctions ont une amplitude de 90°, et ne distinguons les fonctions en b des fonctions en c que par un accent mis sur les premières. Alors l'équation qu'il s'agit de démontrer sera

$$\frac{\pi}{2} = F E' + F' E - F F' \ldots\ldots (d')$$

Je regarde le premier membre comme inconnu, et je l'appelle Π, je différentie ensuite les deux membres par rapport à c, qui est la seule variable qu'ils contiennent. Or, ayant $E = \int \Delta d\phi$, $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, $\Delta^2 = 1 - c^2 \sin.^2\phi$, il en résulte, par les principes connus, $\frac{dE}{dc} = -\int \frac{c\,d\phi \sin.^2\phi}{\Delta} = \frac{1}{c}(E - F)$, et $\frac{dF}{dc} = \int \frac{c\,d\phi \sin.^2\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{c}\int \frac{d\phi}{\Delta^3} - \frac{1}{c}\int \frac{d\phi}{\Delta}$. Mais, par les formules de l'art. 9, on a $\int \frac{d\phi}{\Delta^3} = \frac{1}{b^2}\int \Delta\, d\phi - \frac{c^2 \sin.\phi \cos.\phi}{b^2 \Delta}$, et dans le cas de $\phi = 90°$ dont il s'agit, le second terme s'évanouit, et ainsi on aura $\frac{dF}{dc} = \frac{E - b^2 F}{b^2 c}$. Les variations de E' et F' s'exprimeront semblablement par rapport à b, et parce que $bdb + cdc = 0$, on en déduira $\frac{dE'}{dc} = -\frac{1}{b}(E' - F')$ et $\frac{dF'}{dc} = \frac{-E' + c'F'}{b^2 c}$. Cela posé, si on différentie l'équation

(d'), dont le premier membre est supposé Π, et qu'on substitue les valeurs qu'on vient de trouver pour dE, dF, etc. on trouvera

$$d\Pi = 0.$$

Et ainsi la quantité Π est constante; il suffit par conséquent de la déterminer dans un cas particulier. Soit $c = 0$, ou $b = 1$, on aura $E = F = \frac{1}{2}\pi$, $E' = 1$; quant à F' il est infini, car ayant $F' = \int \frac{d\phi}{\cos\phi} = \text{log. tang. } (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$, si on fait $\phi = 90^\circ$, F' devient infini. Mais comme cet infini est logarithmique, et qu'il est multiplié par $E - F$, qui est zéro, le produit sera encore zéro. Donc le second membre de l'équation (d') se reduit dans ce cas à $\frac{\pi}{2}$, donc il sera toujours égal à $\frac{1}{2}\pi$, et ainsi l'équation (d'), qui est désignée plus précisément par (c') aura lieu, quelque soit c.

Ce théorême donne une relation entre les fonctions E_1, F_1; qui appartiennent au module c, et les fonctions semblables pour le module b. Il faudroit une seconde relation de ce genre pour pouvoir déterminer les fonctions de la seconde espèce $E_1 b$, $E_1 c$ par celles de la première $F_1 b$, $F_1 c$; mais il ne paroit pas qu'on puisse la trouver en général.

Nous avons déja remarqué deux cas où ces réductions ont lieu; ce nouveau théorême va nous en fournir un troisième. Supposons $b = c' = \frac{1-b}{1+b}$, ce qui donne $b = -1 + \sqrt{2}$, $c' = -2 + 2\sqrt{2}$; dans ce cas $E_1 b$ et $F_1 b$, deviendront E'_1 et F'_1, et l'équation (c') donnera

$$\frac{\pi}{2} = F_1 E'_1 + F'_1 E_1 - F_1 F'_1;$$

mais par les formules de l'art. 32, on a $F_1 = (1 + c') F'_1 = \sqrt{2}. F'_1$ et

$$b F_1 = -E_1 + (1+b) E'_1.$$

De là il suit que les quarts d'ellipse E 1, E° 1 se détermineront par la seule fonction F 1, et qu'on aura

$$\frac{\pi}{2} = F1\{E1\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})F1\}$$

$$\frac{\pi}{2} = F1\{2E^{\circ}1 - F1\}.$$

Il en sera de même de toutes les autres ellipses formées d'après les excentricités c, c°, $c^{\circ\circ}$, etc.

Remarque sur la formule intégrale

$$Z = \int \frac{(A + Bx^2 + Cx^4 + \text{, etc.})dx}{(1 \pm x^2)\sqrt{(a + \mathfrak{b}x^2 + ax^4)}}$$

(38). Cette formule peut toujours se décomposer en deux parties, l'une dégagée du dénominateur $1 \pm x^2$, et de la forme

$$\int \frac{(A' + B'x^2 + C'x^4 + \text{, etc.})dx}{\sqrt{(a + \mathfrak{b}x^2 + ax^4)}},$$

l'autre de la forme

$$\int \frac{A''(1 \mp x^2)dx}{(1 \pm x^2)\sqrt{(a + \mathfrak{b}x^2 + ax^4)}}.$$

La première se ramène aisément aux fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèces ; la seconde paroît dépendre des fonctions de la troisième espèce : mais à l'aide d'une substitution très-simple, on trouve qu'elle peut s'intégrer absolument par arcs de cercle ou par logarithmes. En effet, soit $1 \pm x^2 = \frac{2}{z}$, et cette seconde intégrale deviendra

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(4a \mp 2\mathfrak{b}z + cz^2)}};$$

Donc la formule Z peut toujours s'intégrer par les arcs d'ellipse.

Approximations pour les fonctions elliptiques de la troisième espèce.

(39) Considérons enfin les fonctions de la troisième espèce représentées par la formule générale

$$\Pi = \int \frac{A + B \sin.^2\phi}{1 + n \sin.^2\varphi} \cdot \frac{d\phi}{\Delta},$$

dans laquelle les coëfficiens A, B, n, peuvent avoir des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. La méthode que nous avons suivie jusqu'à-présent, consiste à ramener la formule intégrale proposée à une autre formule de la même espèce, dont le module soit plus petit, et à continuer ainsi jusqu'à ce qu'on parvienne à un module assez petit pour être entièrement négligé, auquel cas la formule s'intègre d'elle-même. La même méthode s'applique avec un égal succès aux fonctions de la troisième espèce; et il arrive assez heureusement que la même substitution, qui sert à diminuer de plus en plus le module c, opère le même effet sur le coëfficient n, et le réduit bientôt à être plus petit que toute quantité donnée. Cet effet est d'autant plus remarquable, qu'il a lieu, soit que la valeur de n dans la formule proposée soit positive, soit qu'elle soit négative : cependant il semble, au premier coup-d'œil, que la fonction Π change de nature, lorsque n est négatif et plus grand que l'unité, puisqu'alors elle est susceptible de devenir infinie, et qu'elle le devient en effet toutes les fois que $1 + n \sin.^2\phi = 0$.

Pour dissiper toute obscurité à cet égard, nous allons prouver que, quelque soit n positif ou négatif, on peut ramener immédiatement la formule proposée à une autre, où n seroit plus petit que l'unité, et même plus petit que c.

Observons d'abord que la formule H peut s'écrire ainsi :

$$H=\frac{An+B}{2n}\int\frac{d\varphi}{\Delta}+\frac{An-B}{2n}\int\frac{1-n\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}.$$

La première partie n'ayant aucune difficulté, occupons-nous de la seconde, et faisons :

$$P=\int\frac{1-n\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta};$$

faisons en même tems

$$Q=\int\frac{1-\frac{c^2}{n}\sin.^2\phi}{1-\frac{c^2}{n}\sin.^2\phi}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta},$$

nous aurons, en ajoutant ces deux formules,

$$P+Q=\int\frac{1-c^2\sin.^4\phi}{1+(n+\frac{c^2}{n})\sin.^2\phi+c^2\sin.^4\phi}\cdot\frac{2d\phi}{\Delta}.$$

Soit pris maintenant l'angle ψ, tel que $\sin.\psi=\frac{(1+c)\sin.\phi}{1+c\sin.^2\phi}$, et soit fait pour abréger $m=\frac{(n-c)^2}{n(1+c)^2}$, la substitution donnera,

$$P+Q=\frac{2}{1+c}\cdot\int\frac{d\psi}{1+m\sin.^2\psi},$$

et ainsi on a ce résultat très-remarquable :

$$\int\frac{1-n\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}+\int\frac{1-\frac{c^2}{n}\sin.^2\phi}{1+\frac{c^2}{n}\sin.^2\phi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}=\frac{2}{1+c}\int\frac{d\psi}{1+m\sin.^2\psi}.$$

Or, des deux nombres n, $\frac{c^2}{n}$ si l'un est plus grand que c, l'autre est certainement plus petit : donc, *on peut toujours ramener la formule intégrale* H, *à une formule semblable dans laquelle* n *soit plus petit que* c.

Ainsi, lorsque n est négatif et plus grand que l'unité, l'in-

convénient qu'a la formule H de devenir infinie pour certaines valeurs de ϕ, se trouve en quelque sorte rejeté sur la transcendante de l'ordre inférieur $\int \frac{d\psi}{1+m\sin.^2\psi}$, et il ne reste plus à considérer qu'une fonction elliptique régulière, dont la valeur est toujours finie.

Remarquons que dans le cas particulier de $n=c$, on a, par une intégration absolue,

$$\int \frac{1-c\sin.^2\phi}{1+c\sin.^2\phi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}=\frac{\psi}{1+c};$$

de même, dans le cas de $n=-c$, si on fait,

$$\sin.\omega=\frac{(1-c)\sin.\varphi}{1-c\sin.^2\varphi},$$

on aura,

$$\int \frac{1+c\sin.^2\phi}{1-c\sin.^2\phi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}=\frac{\omega}{1-c}.$$

Ces deux formules sont comprises l'une et l'autre dans celle de l'article 37.

Enfin, si n étoit imaginaire, et de la forme $\nu(\cos.\alpha+\sqrt{-1}\sin.\alpha)$, on voit par la formule générale, que le cas où ν est d'une grandeur quelconque, se rameneroit tout de suite au cas de ν plus petit que c.

(40) Cela posé, procédons à la transformation de la formule H, que nous mettrons sous la forme,

$$H=\int\left(A+\frac{B\sin.^2\varphi}{1+n\sin.^2\varphi}\right)\frac{d\varphi}{\Delta},$$

et dans laquelle on pourra supposer que n est plus petit que c. Nous ferons à l'ordinaire $\sin.^2\phi=\frac{1}{2}(1+c^0\sin.^2\phi^0-\Delta^0\cos.\phi^0)$, et la substitution donnera,

$$H=\frac{1+c}{2}\left\{H^0-\frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\int\frac{d\varphi^0\cos.\varphi^0}{1+n^0\sin.^2\varphi^0}\right\},$$

formule où l'on a semblablement $H^0=\int\left(A^0+\frac{B^0\sin.^2\varphi^0}{1+n^0\sin.^2\varphi^0}\right)\frac{d\varphi^0}{\Delta^0}$,

et où les nouveaux coëfficiens sont :

$$n^{\circ} = \frac{n(n+c')}{(1+b)'(1+n)},$$

$$A^{\circ} = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n},$$

$$B^{\circ} = B.\ \frac{c'+2n+n^{\circ}}{2(1+b)'(1+n)'}.$$

La même loi se continuera dans les transformées ultérieures, de sorte qu'en faisant

$$n^{\circ\circ} = \frac{n^{\circ}(n^{\circ}+c^{\circ\circ})}{(1+b^{\circ})'(1+n^{\circ})},$$

$$A^{\circ\circ} = A^{\circ} + \frac{\frac{1}{2}B^{\circ}}{1+n^{\circ}},$$

$$B^{\circ\circ} = B^{\circ}.\ \frac{c^{\circ\circ}+2n^{\circ}+n^{\circ\circ}}{2(1+b^{\circ})'(1+n^{\circ})'},$$

on aura :

$$H^{\circ} = \frac{1+c^{\circ\circ}}{2}\left\{H^{\circ\circ} - \frac{\frac{1}{2}B^{\circ}}{1+n^{\circ}}\int\frac{d\phi^{\circ\circ}\cos.\phi^{\circ\circ}}{1+n^{\circ\circ}\sin.^{2}\phi^{\circ\circ}}\right\}$$

et ainsi de suite.

(41). Examinons d'abord avec quelque détail la loi de progression des coëfficiens, n, n°, $n^{\circ\circ}$, etc. Si on fait $n = mc$, et semblablement $n^{\circ} = m^{\circ}c^{\circ}$, on aura $m^{\circ} = \frac{m(m+c)}{1+cm}$, ce qui est une formule assez simple pour déduire m° de m, et on déduiroit de même $m^{\circ\circ}$ de m°, etc. Remarquons maintenant que puisqu'on suppose $n < c$, on a $m < 1$. Or, de là il suit qu'on a aussi $m^{\circ} < 1$ et même $m^{\circ} < m$; car soit pour un moment $m^{\circ} = \delta m$, ou $\delta = \frac{m+c}{1+cm}$, il en résulteroit $1 + \delta = \frac{(1+c)(1+m)}{1+cm}$, et $1 - \delta = \frac{(1-c)(1-m)}{1+cm}$; valeurs qui prouvent que $1+\delta$ et $1-\delta$ sont toujours positifs, et qu'ainsi δ est toujours plus petit que l'unité. Donc $m^{\circ} < m$, et par une raison semblable $m^{\circ\circ} < m^{\circ}$, $m^{\circ\circ\circ} < m^{\circ\circ}$, etc.

D'où

D'où l'on voit que les termes, m, m^0, m^{00}, etc., sont non-seulement plus petits que l'unité, mais qu'ils décroissent continuellement. Il en résulte par conséquent que la suite n, n^0, n^{00}, n^{000}, etc. décroît plus rapidement que la suite c, c^0, c^{00}, etc. chaque terme de la première étant plus petit que le terme correspondant de la seconde.

A l'égard des signes de ces coëfficiens, il y a deux cas à considérer. 1°. Si n est positif, ou qu'étant négatif il soit plus grand c^2, alors n^0 sera positif; il en sera donc de même de n^{00}, et ainsi tous les termes n^0, n^{00}, n^{000}, etc. sans exception seront positifs. Dans ce premier cas se trouve compris celui de $n = \pm c$, qui donnera $n^0 = c^0$, $n^{00} = c^{00}$, et ainsi à l'infini; mais ce cas est inutile à considérer, parce qu'alors on a vu dans l'article 38, que la fonction H se ramène à la première espèce.

2°. Si n est négatif et plus petit que c^2, soit $n = -c^2 \sin.^2\theta$, On pourra faire de même $n^0 = -c^{0\,2} \sin.^2\theta^0$, et on trouvera que l'angle θ^0 est réel et déterminé par la formule

$$\text{tang.}\,(\theta^0 - \theta) = b\,\text{tang.}\,\theta,$$

ce qui est la même loi, suivant laquelle ϕ^0 se déduit de ϕ. Calculant donc successivement θ^0, θ^{00}, etc. d'après cette loi, on aura $n^0 = -c^{0\,2} \sin.^2\theta^0$, $n^{00} = -c^{00\,2} \sin.^2\theta^{00}$, etc.; d'où l'on voit que dans ce second cas tous les n sont négatifs, et plus petits que les c^2 correspondans, ce qui rend encore plus convergente la suite n, n^0, n^{00}, etc.

(42). Connoissant ainsi la loi de progression des coëfficiens n, venons à celle des coëfficiens A et B. Soit pour abréger

$$k = \frac{c^2 + 2n + n^2}{2(1+b)^2(1+n)^2},$$

et soit désigné par k^0 une semblable fonction de c^0 et n^0, et ainsi de suite, on aura donc

$$B^0 = k\,B,\ B^{00} = kk^0\,B,\ B^{000} = kk^0k^{00}\,B,\ \text{etc.}$$

Mais puisqu'à une certaine distance les nombres c et n, qu'on peut désigner par c^μ et n^μ, sont assez petits pour être regardés comme nuls, il est clair que k^μ est dans le même cas, et qu'ainsi on peut faire en toute sureté $B^\mu = 0$. Quant à la valeur de A^μ, on trouvera aisément qu'elle est donnée par la suite indéfinie

$$A^\mu = A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}kB}{1+n^0} + \frac{\frac{1}{2}kk^0B}{1+n^{00}} + \text{etc.}$$

Suite très-convergente, et dont on calculera plus ou moins de termes, suivant l'approximation qu'on veut obtenir. Appellons toujours Φ la limite des angles $\phi, \frac{\phi^0}{2}, \frac{\phi^{00}}{2}$, etc., ce qui donne, après un nombre de termes suffisant, $\phi^\mu = 2^\mu \Phi$, alors la valeur de H^μ sera $H^\mu = 2^\mu A^\mu \Phi$.

(43). Il est facile maintenant de développer la valeur complète de H que donnent les transformées successives. Soit pour abréger

$$\alpha = \left(A + \frac{\frac{1}{2}B}{1+n} + \frac{\frac{1}{2}kB}{1+n^0} + \frac{\frac{1}{2}kk^0B}{1+n^{00}} + \text{etc.}\right)(1+c^0)(1+c^{00}),\text{etc.}$$

et on aura

$$H = \alpha\Phi - \frac{1+c^0}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}B}{1+n}\int\frac{d\phi^0\cos.\phi^0}{1+n^0\sin.^2\phi^0}$$

$$- \frac{1+c^0}{2}\cdot\frac{1+c^{00}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}kB}{1+n^0}\int\frac{d\phi^{00}\cos.\phi^{00}}{1+n^{00}\sin.^2\phi^{00}}$$

$$- \frac{1+c^0}{2}\cdot\frac{1+c^{00}}{2}\cdot\frac{1+c^{000}}{2}\cdot\frac{\frac{1}{2}kk^0B}{1+n^{00}}\int\frac{d\phi^{000}\cos.\phi^{000}}{1+n^{000}\sin.^2\phi^{000}}$$

$$- \text{etc.}$$

Les termes qui restent à intégrer dépendent des arcs de cercle, lorsque tous les coëfficiens n^0, n^{00}, etc. sont positifs, et des logarithmes, lorsqu'ils sont tous négatifs. Lorsque $\phi = 90^0$ ou un multiple de 90^0, ces intégrales disparoissent, et on a simplement $H = \alpha\phi$, donc $H1 = \alpha.\frac{1}{2}\pi$.

Si on fait $n = 0$, on aura $k = \frac{c^0}{2}$, $k^0 = \frac{c^{00}}{2}$, etc., et la valeur de H s'accordera avec celle de G de l'art. 30.

Remarquez que la valeur de H se termineroit, ainsi que celle de la limite A^μ, si quelqu'un des nombres k, k^0, k^{00}, etc. étoit zéro, ou si on avoit l'une des égalités $n = -1 + b$, $n^0 = -1 + b^0$, $n^{00} = -1 + b^{00}$, etc. On connoît donc déja une infinité de cas où la fonction H peut se ramener à la première espèce. Ces cas sont ceux où en faisant $n = -c^2 \sin.^2\theta$, on auroit pour θ l'une des valeurs qui satisfont à l'équation $F(\theta) = \frac{2\nu+1}{2^\mu} F\,1$, μ et ν étant des entiers quelconques.

Second moyen de transformation appliqué à la formule H.

(44). Ce nouveau moyen consiste à prendre, comme dans l'art. 39, un nouvel angle ϕ' tel que

$$\sin.\,\phi' = \frac{(1+c)\sin.\,\phi}{1 + c\sin.^2\phi}.$$

Cet angle ϕ' croîtra continuellement avec l'angle ϕ, et ils coïncideront entièrement lorsque ϕ sera un multiple de 90°. Faisons, conformément aux dénominations accoutumées, $c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, et $\Delta' = \sqrt{(1 - c'^2\sin.^2\phi')}$, nous aurons

$$\sin.^2\phi = \frac{1-\Delta'}{c(1+\Delta')}, \quad \frac{d\phi}{\Delta} = \frac{1}{1+c}\cdot\frac{d\phi'}{\Delta'},$$

valeurs qui étant substituées dans la formule

$$H = \int\left(A + \frac{B\sin.^2\phi}{1 + n\sin.^2\phi}\right)\frac{d\phi}{\Delta},$$

donneront

$$H = \frac{1}{1+c}H' - \frac{B}{2n(1+c)}\int\frac{d\phi'}{1 + n'\sin.^2\phi'},$$

H' représentant $\int \left(A' + \frac{B' \sin.^2 \phi'}{1 + n \sin.^2 \phi'}\right) \frac{d\phi'}{\Delta'}$, et les nouveaux coëfficiens étant

$$A' = A + \frac{B}{2n}, \quad B' = \frac{B(n^2 - c^2)}{2n^2(1+c)^2}, \quad n' = \frac{(c-n)^2}{n(1+c)^2}.$$

Ainsi nous trouvons que la formule H dépend d'une formule semblable H', dans laquelle c et n sont différens. Il faut examiner s'il y a quelque avantage à cette transformation.

A l'égard de c, le changement paroît désavantageux, parce que c' étant plus grand que c, le radical Δ' diffère plus de l'unité que Δ. Cependant si on continuoit ainsi par des transformations réïtérées, la limite des quantités c, c', c'', etc. étant l'unité, on prendroit cos. ϕ pour le dernier radical Δ, et alors l'intégration pourroit s'effectuer par les moyens connus. Mais ce genre d'approximation, dont nous n'avons pas fait mention jusqu'à présent, n'est pas le plus commode, et il vaut beaucoup mieux que les transformées successives tendent à diminuer c. Or il est clair que cette diminution peut s'obtenir en renversant le résultat précédent, ou, ce qui revient au même, en l'écrivant ainsi:

$$H = (1 + c^0)\, H^0 + \frac{B^0}{2n^0} \int \frac{d\phi}{1 + n \sin^2 \phi},$$

alors on auroit:

$$\sin. \phi = \frac{(1+c^0) \sin. \phi^0}{1 + c^0 \sin.^2 \phi^0}, \quad H^0 = \int \left(A^0 + \frac{B^0 \sin.^2 \phi^0}{1 + n^0 \sin^2 \phi_0}\right) \frac{d\phi^0}{\Delta^0},$$

et les nouveaux coëfficiens seroient,

$$n^0 = \left(\frac{1+c^0}{2}\right)^2 \left(2n + c^2 \pm 2\sqrt{(n^2 + n c^2)}\right),$$

$$B^0 = \pm B. \frac{2n^0}{\sqrt{(n^2 + nc^2)}},$$

$$A^0 = A \mp \frac{B}{\sqrt{(n^2 + nc^2)}}.$$

A cause du double signe $\pm$, on aura à choisir entre deux transformées ; et il paroît convenable de prendre celle où n^0 sera le plus petit. Or, les valeurs de n^0 sont telles que leur produit $= c^{0\,2}$; ainsi, on pourra toujours faire en sorte que dans la transformée, n^0 soit plus petit que c^0, et cela quelque grand que soit n. On peut donc obtenir le même avantage dans les transformées ultérieures ; et ainsi, par cette méthode, on pourra trouver très-promptement une valeur de H aussi approchée qu'on voudra, sans qu'il soit nécessaire d'aucune préparation lorsque n est un peu grand. Cependant cette méthode a quelque désavantage sur la première, en ce que la valeur de n^0 est irrationnelle, et qu'elle deviendroit même imaginaire si n étoit négatif et $< c^2$. Un second désavantage de cette méthode, c'est que ϕ^0 ne se déduit commodément de ϕ, qu'en employant un angle auxiliaire ψ, tel que $\sin.\psi = c \sin.\phi$; alors on a $\sin.\phi^0 = \frac{1}{\sqrt{c^0}} \text{tang.} \frac{1}{2}\psi$.

Troisième moyen de transformation, appliqué à la formule H.

(45) La méthode que nous avons suivie dans l'article 20, peu s'appliquer à la formule H ; il faut observer pour cela, que si, d'après l'article 17, on fait,

$$\sin.^2\phi = \frac{1-\cos.\psi}{1+\sqrt{(1-c^2\sin.^2\psi)}},$$

on aura $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \frac{\frac{1}{2}d\psi}{\Delta(\psi)}$: substituant ces valeurs dans la formule H de l'art. 40, et faisant, pour abréger $k = \frac{c^2-n^2}{n^2+2n+c^2}$, on trouvera,

$$H = \int\left\{A + \frac{B(1+n+nk-nk\sin.^2\psi)}{(n^2+2n+c^2)(1-k^2+k^2\sin.^2\psi)}\right\}\cdot\frac{\frac{1}{2}d\psi}{\Delta(\psi)}$$

$$-\frac{\frac{1}{2}B}{n^2+2n+c^2}\int\left(\frac{(n+k+kn)\,d\psi\cos.\psi}{(1-k^2+k^2\sin.^2\psi)\,\Delta(\psi)} + \frac{d\psi}{1+k\cos.\psi}\right).$$

La dernière partie est intégrable par arcs de cercle et par logarithmes. La première est une formule semblable à H, dans laquelle c est le même, et n différent. Cette nouvelle valeur de n étant nommée ν, on auroit

$$\nu = \frac{k'}{1-k'} = \frac{(c'-n')^2}{4n(n+1)(n+c')}.$$

Il faudroit renverser le résultat précédent, pour en tirer une approximation semblable à celle qui a été indiquée dans l'article 20; mais comme cette méthode est beaucoup moins avantageuse que les deux précédentes, nous n'y insisterons pas davantage; nous en conclurons seulement que si l'intégrale H est connue lorque $n = \alpha$, elle sera pareillement connue lorsque

$$n = \frac{(c'-\alpha')^2}{(\alpha'+2\alpha+c')^2-(c'-\alpha')^2}.$$

Et par le renversement de cette formule, on trouve que si l'intégrale H est connue dans le cas de $n=6$, elle le sera pareillement dans les quatre cas que contient l'expression

$$n = \frac{-\sqrt{6} \pm \sqrt{(6+c')}}{\sqrt{6} \pm \sqrt{(6+1)}}.$$

C'est ce qu'on trouveroit aussi par la combinaison des deux premières méthodes; car la première méthode donne, entre ϕ et ϕ^0, cette relation, $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \frac{1+c^0}{2} \cdot \frac{d\phi^0}{\Delta^0}$, ou $F(c,\phi) = \frac{1+c^0}{2} \cdot F(c^0,\phi^0)$; la seconde, en mettant ψ à la place de ϕ, donneroit $F(c,\psi) = (1+c^0)\,F(c^0,\phi^0)$; donc, par la combinaison des deux, on a $F(c,\phi) = \frac{1}{2}F(c,\psi)$, ou $\frac{d\phi}{\Delta(\phi)} = \frac{1}{2}\frac{d\psi}{\Delta(\psi)}$; ce qui est le fondement de la troisième méthode; et par conséquent toutes les conclusions tirées de cette troisième méthode, sont renfermées implicitement dans les deux autres.

Nous nous proposons maintenant, à l'aide de ces différentes transformations, de faire connoître les cas où la

fonction elliptique H peut se ramener aux fonctions de la seconde espèce, et ne dépend ainsi que des arcs d'ellipse.

Des cas où la fonction H *peut se ramener aux fonctions elliptiques de la seconde espèce.*

(46) Les cas les plus simples où la réduction a lieu immédiatement, sont ceux de $n=-1$, $n=-c^2$, $n=\pm c$. *Voyez* les art. 10 et 39. Si donc, parmi les transformées successives qu'on obtient par l'une des trois méthodes exposées, il en est une qui retombe dans l'un de ces cas, on est assuré que la formule proposée, et toutes les autres transformées, dont le nombre est infini, peuvent se réduire à la seconde espèce, quelquefois même à la première, et ne dépendent ainsi que des arcs d'ellipse : d'où l'on voit qu'il est possible de trouver une infinité de valeurs de n réelles et imaginaires, exprimées en fonctions de c, qui donnent lieu à cet abaissement. C'est ce que nous allons développer.

Par la première méthode. D'une valeur de n correspondante à c, on tire cette valeur de n^0 correspondante à c^0 :

$$n^0=\frac{n(n+c^2)}{(1+b)(1+n)}.$$

Réciproquement d'une valeur de n^0 correspondante à c^0, on déduit cette valeur de n correspondante à c :

$$n=\frac{2}{(1+c^0)^2}\left\{n^0-c^0\pm\sqrt{(n^0+1)(n^0+c^{0\,2})}\right\}:$$

voici l'usage de ces formules :

Si dans la première on fait $n=-1$, ou $n=-c^2$, on n'a aucun résultat ; si on fait $n=\pm c$, on a $n^0=\frac{1-b}{1+b}=c^0$, ou $n=c$, ce qui n'apprend rien de nouveau.

Si dans la seconde, on fait $n^0=-1$, on aura $n=\frac{-2}{1+c^0}$.

Le second membre est une fonction de c^0 ; il faut le rendre fonction de c, et pour cela substituer à la place de c^0 sa valeur $\frac{1-b}{1+b}$; on aura ainsi $n = -1-b$, ce qui est un nouveau cas. Mais comme, en vertu de l'article 39, on peut ne considérer que les valeurs de n plus petites que c, et réduire celles qui excéderoient c à la valeur $\frac{c^2}{n}$, dans ce cas, au lieu de la valeur $-1-b$, on peut prendre $\frac{c^2}{-1-b}$, ou $-1+b$. C'est aussi ce qu'on trouveroit immédiatement en faisant, $n^0 = -c^2$, et il en résulteroit, $n = -1+b$.

Le cas de $n = -1+b$, peut conduire à une infinité d'autres. Faisons, dans la seconde formule, $n^0 = -1+b^0$, nous aurons :

$$n = \frac{-1+b^0-c^0 \pm b^0\sqrt{(1-b^0)}}{\frac{1}{2}(1+c^0)^2}.$$

Il faut changer le second membre en une fonction de c ou b, et pour cela faire $b^0 = \frac{2\sqrt{b}}{1+b}$, $c^0 = \frac{1-b}{1+b}$, ce qui donnera

$$n = \frac{-(1-\sqrt{b})}{1 \pm \sqrt{\left(\frac{b}{1+b}\right)}}.$$

Ces deux valeurs de n en feroient connoître quatre autres ; par une nouvelle substitution, les quatre, huit, et ainsi de suite.

Toutes les valeurs de n ainsi trouvées sont négatives, et plus petites que c^2 ; elles peuvent donc être représentées par la formule $n = -c^2 \sin.^2\theta$. Nous avons déja remarqué dans l'article 43 que les valeurs qui rendent nul quelqu'un des termes $n+1-b$, n^0+1-b^0, $n^{00}+1-b^{00}$, etc., rendent nul aussi quelqu'un de ceux de la suite k, k^0, k^{00}, etc. et ainsi dans tous ces cas la formule générale de l'art. 43

se

se terminera d'elle-même, et la fonction H sera réduite à la première espèce.

Soit encore dans la seconde formule $n^0 = c^0$, il en résultera $n = \pm c$, ce qui n'apprend rien de nouveau; enfin, soit $n^0 = -c^2$, et on aura pour nouvelles valeurs $n = -c^2 \pm bc\sqrt{-1}$, d'où il en résultera une infinité d'autres par des substitutions réitérées.

En général on voit que chaque valeur de n négative, et plus grande que c^2, en donnera deux imaginaires; chaque valeur positive en donnera deux réelles, l'une positive et l'autre négative. Mais nous ne connoissons encore dans les valeurs positives que le cas de $n = c$, qui n'en fait pas connoître d'autres: les autres méthodes vont en offrir de nouveaux.

(47). *Par la seconde méthode.* D'une valeur de n correspondante à c, on tire cette valeur de n^0 correspondante à c^0

$$n^0 = \left(\frac{\sqrt{(n+c^2)} - \sqrt{n}}{1+b}\right)^2.$$

Réciproquement d'une valeur de n^0 correspondante à c^0, on tire cette valeur de n correspondante à c:

$$n = \frac{(c^0 - n^0)^2}{n^0 (1+c^0)^2}.$$

Soit dans la première formule $n = c$, et on aura $n^0 = c\left(\frac{\sqrt{(1+c)}-1}{1+b}\right)^2$; mais il faut changer le second membre en fonction de c^0, et pour cela faire $c = \frac{2\sqrt{c^0}}{1+c^0}$, $b = \frac{1-c^0}{1+c^0}$. La substitution faite, on ôtera par-tout l'indice 0, et on aura

$$n = \tfrac{1}{2}\sqrt{c}.\{1 + \sqrt{c} - \sqrt{(1+c)}\}^2.$$

Si on eût fait $n = -c$, on auroit trouvé cette valeur de n

$$n = -\tfrac{1}{2}\sqrt{c}.\{1 - \sqrt{c} - \sqrt{(1+c)}\}^2.$$

Ces deux nouvelles valeurs sont moindres que c, et chacune

des deux en peut fournir une infinité d'autres, tant par la formule de cette seconde méthode que par celle de la première.

(48). *Par la troisième méthode.* c restant le même, si ν est une valeur de n, on en connoîtra une autre par la formule,

$$n = \frac{(c^2-\nu^2)^2}{4(\nu+1)(\nu+c^2)},$$

et aussi une autre, par l'inverse de cette formule, qui donne,

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1+\frac{c^2}{\nu})}-1}{\sqrt{(1+\frac{1}{\nu})}+1}.$$

Dans celle-ci on peut mettre $\frac{c^2}{\nu}$ à la place de ν, ce qui donnera pour troisième formule,

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1+\nu)}-1}{\sqrt{(1+\frac{\nu}{c^2})}+1}.$$

Cette troisième méthode est, comme nous l'avons déja remarqué, une suite des deux autres; mais elle est plus commode pour l'objet actuel; parce que la valeur de n est exprimée immédiatement en fonction de c, et qu'il n'y a point de réduction à faire d'une fonction de c^2 à une fonction de c.

La première formule ne donnant rien dans les cas les plus simples, passons à la seconde, et faisons $\nu = -1$, il en résultera $n = \pm b - 1$, ce qui est une valeur déja connue. Faisons ensuite $\nu = b - 1$ dans la troisième formule, nous aurons

$$n = \frac{\pm\sqrt{b}-1}{\sqrt{(\frac{b}{b-1})}+1},$$

valeur qui a été déja trouvée par la première méthode, mais moins immédiatement. On pourroit y changer le signe de b, ce qui donneroit deux nouvelles valeurs imaginaires.

Soit $\nu = -c^2$ dans la seconde formule, ou $\nu = -1$ dans la troisième, nous aurons $n = -c^2 \pm b\,c\sqrt{-1}$, ce qui est un résultat déja connu.

Enfin faisons $\nu = c$ dans la seconde ou la troisième formule, et nous aurons

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1+c)-1}}{\sqrt{(1+\frac{1}{c})+1}},$$

valeur qui revient encore à celles que nous avons trouvées par la seconde méthode. Si on eût fait $\nu = -c$, on auroit trouvé ces valeurs imaginaires,

$$n = \frac{\pm\sqrt{(1-c)-1}}{\sqrt{(1-\frac{1}{c})+1}}.$$

Il est inutile d'entrer dans de plus grands détails, et on voit que par la combinaison de ces formules, on obtiendra une multitude infinie de valeurs de n exprimées en fonctions de c réelles ou imaginaires, au moyen desquelles la formule H pourra être débarassée du dénominateur $1 + n\sin.^2\phi$, par une ou plusieurs transformations convenables, et qui peuvent s'effectuer par les méthodes précédentes. Ainsi cette fonction elliptique de la troisième espèce peut se réduire, dans une infinité de cas, à une fonction de la seconde espèce, et ne dépend alors que des arcs d'ellipse.

D'une autre manière d'évaluer les fonctions elliptiques.

(49). Il peut être nécessaire dans plusieurs cas, sur-tout dans les problèmes de mécanique, d'exprimer par la seule variable ϕ les fonctions elliptiques dont ces problèmes dé-

pendent. Alors le développement se fera de la manière connue ; mais les méthodes précédentes serviront toujours à simplifier la détermination des coëfficiens.

Considérons d'abord la fonction $F = \int \frac{d\varphi}{\Delta}$, et supposons $\frac{1}{\Delta} = A - 2B\cos. 2\varphi + 4C\cos. 4\varphi - \text{etc.}$, afin qu'il en résulte

$$F = A\varphi - B\sin. 2\varphi + C\sin. 4\varphi - D\sin. 6\varphi + \text{etc.}$$

Il s'agit d'avoir le plus simplement qu'il est possible, les valeurs des coëfficiens A, B, C: etc. Or, par un premier développement, on a $\frac{1}{\Delta} = 1 + \frac{1}{2}c^2\sin.^2\varphi + \frac{1.3}{2.4}c^4\sin.^4\varphi + \text{etc.}$; ensuite mettant au lieu des puissances des sinus leurs valeurs en cosinus linéaires, on trouve une suite de la forme supposée, dont les coëfficiens sont :

$$A = 1 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1^2.9}{4.16}c^4 + \frac{1.9.25}{4.16.36}c^6 + \frac{1.9.25.49}{4.16.36.64}c^8 + \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{2}S + \frac{2}{3}S + \frac{3}{4}S + \frac{4}{5}S + \text{etc.}$$

$$C = \frac{1}{8}S + \frac{3}{10}S + \frac{5}{12}S + \text{etc.}$$

$$D = \frac{3}{18}S + \frac{4}{21}S + \text{etc.}$$

etc. etc.

Dans chaque valeur on a désigné par S le terme supérieur de la valeur précédente, et par ce moyen la loi de ces suites est assez facile à saisir. Les multiplicateurs à employer pour passer d'une ligne a l'autre, sont en général $\frac{n}{(n+1)(2n+2)}$ $\frac{2n}{(n+1)(2n+3)}$, $\frac{3n}{(n+1)(2n+4)}$, etc. ; cette loi ne serviroit pas à déduire B de A, mais elle servira à déduire C de B, en faisant $n = 1$, D de C, en faisant $n = 2$, etc. On pourra donc par ces suites calculer effectivement les valeurs de A,

B, C, etc. ; mais lorsque c diffère peu de l'unité, il faudroit calculer beaucoup de termes pour avoir une approximation médiocre.

(50). La valeur de $\frac{1}{\Delta}$ étant multipliée successivement par $d\phi$, $d\phi \cos. 2\phi$, $d\phi \cos. 4\phi$, etc., puis intégrée depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90°$, donnera,

$$A.\frac{\pi}{2} = \int \frac{d\phi}{\Delta},\ B\frac{\pi}{2} = \int -\frac{d\phi \cos. 2\phi}{\Delta},\ 2\,C.\frac{\pi}{2} = \int \frac{d\phi \cos. 4\phi}{\Delta}, \text{ etc.}$$

Ainsi chacun des coëfficiens A, B, C, etc. se trouve par une intégrale définie, et ces intégrales ne dépendent que des quantités $F1$, $E1$. On a d'abord pour les deux premiers $A\frac{\pi}{2} = F1$, et $B\frac{\pi}{2} = \frac{2}{c'}(F1 - E1) - F1$, et en substituant les valeurs de $F1$ et $E1$ (art. 27 et 31), il en résulte

$$A = (1 + c^0)(1 + c^{00})(1 + c^{000}), \text{ etc.}$$
$$\frac{B}{A} = \frac{c^0}{2} + \frac{c^0 c^{00}}{4} + \frac{c^0 c^{00} c^{000}}{8} + , \text{ etc.} \quad \ldots (\alpha).$$

Ces deux premiers coëfficiens étant trouvés, on peut en déduire tous les autres; car en comparant la différentielle de $\frac{1}{\Delta}$ avec celle de sa valeur, on obtient

$$2.3\,C = 4B\left(\frac{2-c'}{c'}\right) - A$$
$$3.5\,D = 16C\left(\frac{2-c'}{c'}\right) - 1.3\,B \ldots . (6)$$
$$4.7\,E = 36D\left(\frac{2-c'}{c'}\right) - 2.5\,C$$
$$\text{etc.}$$

Cependant ces équations ne seroient pas d'un usage bien sûr si c étoit très-petit; car il faudroit supposer A et B calculés avec une extrême précision, pour que les erreurs ne devinssent pas bientôt fort considérables sur les autres coëfficiens. Dans ce cas, on pourroit employer les suites de l'article précédent; mais il vaut encore mieux se servir des mêmes

équations (6) dans un ordre inverse. Par exemple, si l'approximation dont on a besoin n'exige pas qu'on aille au-delà du terme D, on pourra négliger E dans la troisième des équations (6), et il en résultera le rapport de D à C. La seconde fera connoître celui de C à B, et la première donnera celui de B à A, ce qui pourra servir de vérification. On voit dès-lors que tous les coëfficiens seront connus, jusqu'à celui qu'on se permet de négliger. Au reste, le coëfficient A est celui qu'il faudra toujours déterminer avec le plus de précision; car $A\phi$ est la partie principale de F, celle qui augmente indéfiniment; les autres ne sont que des inégalités ou *équations* de cette valeur moyenne.

(51). Les fonctions elliptiques de la seconde espèce, pouvant être représentées par la formule $G = \int (\alpha + 6\cos. 2\phi)\frac{d\phi}{\Delta}$, il est aisé de voir qu'on a

$$G = \alpha\,[A\varphi - B\sin. 2\varphi + C\sin. 4\varphi - D\sin. 6\varphi + \text{etc.}]$$
$$-\varepsilon\left[B\varphi - \left(\frac{A+2C}{2}\right)\sin. 2\varphi + \frac{B+3D}{4}\sin. 4\phi - \left(\frac{2C+4E}{6}\right)\sin. 6\varphi + \text{etc.}\right];$$

ainsi ce développement ne présente aucune difficulté nouvelle, et s'exécute par les mêmes coëfficiens.

A l'égard des fonctions de la troisième espèce, il suffira de considérer la formule $H = \int \frac{1}{1+n\sin.^2\varphi}\cdot\frac{d\phi}{\Delta}$: or, si on suppose

$$H = M\phi - N\sin. 2\phi + P\sin. 4\phi - Q\sin. 6\phi + \text{etc.}$$

et qu'on différencie chaque membre, il en résultera une valeur de $\frac{1}{\Delta}$, qui, étant comparée à celle de l'article 49, donnera,

$$N = -M + \frac{2}{n}(A - M),$$

$$2P = -2N - M + \frac{4}{n}(B - N),$$

$$3Q = -4P - N + \frac{8}{n}(C - P),$$

$$4R = -6Q - 2P + \frac{12}{n}(D - Q),$$

etc.

D'où il suit qu'en supposant toujours A, B, C, etc. connus, il suffit de déterminer le premier coëfficient M, pour en conclure tous les autres. Or, on a, par l'art 43,

$$\frac{M}{A} = 1 - \frac{1}{2}n\left[\frac{1}{1+n} + \frac{k}{1+n^0} + \frac{kk^0}{1+n^{00}} + \text{etc.}\right]:$$

On pourroit aussi déduire M de A, B, C, etc., car on connoit la formule $\frac{\sqrt{(1+n)}}{1+n\sin.^2\phi} = 1 + 2\alpha\cos.2\phi + 2\alpha^2\cos.4\phi + \text{etc.}$, dans laquelle $\alpha = \frac{\sqrt{(1+n)}-1}{\sqrt{(1+n)}+1}$: multipliant cette formule par $\frac{d\varphi}{\Delta}$, et intégrant depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = 90^\circ$, on aura,

$$M\sqrt{(1+n)} = A - 2B\alpha + 4C\alpha^2 - 6D\alpha^3 + \text{etc.}$$

(52). Il ne resteroit, pour faciliter ces déterminations, qu'à construire une table des valeurs de A et B, ou de leurs logarithmes, pour différentes valeurs du module c; ce qu'on pourroit faire aisément par les formules (α). Il conviendroit de représenter chaque module par le sinus d'un angle, et alors le complément du module répondroit au complément de l'angle. Soient A et B les nombres du module sin. θ, A′ et B′ ceux de son complément cos. θ, alors, suivant le théorême de l'art. 37, on aura cette relation, qui pourra servir de vérification continuelle $\frac{4}{\pi AA'} = 1 - \frac{B}{A}\sin.^2\theta - \frac{B'}{A'}\cos.^2\theta$. Voici un léger essai de cette table, qu'il faudroit étendre davantage, mais qui ne laissera pas d'être utile dans plusieurs occasions, et qui d'ailleurs a été vérifiée avec soin.

Angle du Module.	Log. de A.	Log de B.	Angle du Module.	Log. de A.	Log. de B.
0 d.	Zéro.	Inf. neg.	90 d.	Inf. pos.	Inf. pos.
1	0,0000531	5,5807199	89	0,5390725	0,5390589
2	0,0001523	6,1859163	88	0,1709075	0,2,2?870
3	0,0002978	6,5563036	87	0,4412512	0,1712111
6	0,0011920	7,1380510	84	0,0681934	0,0280176
9	0,0026810	7,4951265	81	0,3161715	9,9917946
12	0,0047636	7,7548016	78	0,2778878	9,8220717
15	0,0074455	7,9453400	75	0,2460561	9,7537455
18	0,0108284	8,1025-6	72	0,2188273	9,6657603
21	0,0147969	8,2497628	69	0,1943915	9,5817130
24	0,0193130	8,3-54420	66	0,1-38201	9,5083232
27	0,0243981	8,4845561	63	0,1581-7	9,4360965
30	0,0301733	8,6860288	60	0,1776527	9,3668218
33	0,0365148	8,6-99658	57	0,1220183	9,2952134
36	0,0434803	8,7079534	54	0,1077813	9,2218545
39	0,0510260	8,8511550	51	0,0947747	9,1556124
42	0,0620766	8,9305914	48	0,0828812	9,0811882
45	0,0720074	9,0070451	45	0,0 20074	9,0070451

Pour faciliter la construction de cette table, il est bon de remarquer qu'ayant exactement $A = \frac{2\sqrt{c^0}}{c} A^0$, on a à-très-peu-près $\frac{B}{A} = \frac{c^0}{2}\sqrt{A^0}$, et cette valeur ne pèche, en excès, que de la petite partie $\frac{1}{10} c^{00\,3}$. D'où il suit que l'erreur ne sera pas d'une unité décimale du 7e ordre, tant que c sera au-dessous de sin. 52° 40′, et avec la correction on peut supposer c sensiblement plus grand. Or, comme la valeur de A se calcule par des facteurs successifs dont $\frac{2\sqrt{c^0}}{c}$ est le premier, on connoitra immédiatement, par le calcul de A, la valeur de log. A^0, et ainsi on aura B d'une manière très-prompte. On peut aussi profiter de la même propriété au-delà de la limite fixée; car on a également $A = \frac{2\sqrt{c^0}}{c} \cdot \frac{2\sqrt{c^{00}}}{c^0} A^{00}$, et de là il s'ensuit, avec encore plus d'approximation, $\frac{B}{A} = \frac{c^0}{2}\left(1 + \frac{c^{00}}{2}\sqrt{A^{00}}\right)$, valeur qui ne tromperoit que de deux unités du 8e ordre, si on avoit c = sin. 84°. Or, il n'est pas

pas nécessaire d'aller plus loin, ni même aussi loin, parce que quand c est si près de l'unité, il y a d'autres formules plus convergentes, dont il est à propos de se servir pour calculer A et B.

Un des premiers usages de ces nombres consiste à déterminer les fonctions F 1 et E 1 par les formules $F1 = \frac{\pi}{2} A$, $E1 = \frac{\pi}{2} A - \frac{\pi}{4} c^2 (A + B)$. Ainsi dans le cas où c n'est pas trop près de l'unité, on a à la fois $F1 = \frac{\pi}{2}(1 + c^2) A^2$, et $E1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A^2}{1 + c^2}(1 + c^{22} - c^{22}\sqrt{A^2})$. Mais pour cet objet il est aussi court de se servir de la formule exacte

$$E1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A^2}{1 + c^2}\left[1 - \frac{c^{22} c^{22}}{2} - \frac{c^{22} c^{22} c^{22}}{4} - \text{etc.}\right]$$

qui est la même que celle de l'art. 31 ; mais sous une autre forme. Cette formule cependant ne seroit pas d'un usage commode, si c étoit trop près de l'unité. Dans ce cas b sera très-petit, et il faudra se servir de la formule $E1 = 1 + \frac{1}{4} b^2 (\log. \frac{4}{b} - \frac{1}{2}) + \frac{3}{16} b^4 (\log. \frac{4}{b} - \frac{13}{12}) + \text{etc.}$, formule que nous avons démontrée ailleurs, et qui meneroit très-promptement au résultat. Il est donc à propos d'avoir des formules semblables pour calculer A et B dans le cas de b très-petit ; ces formules pourroient se déduire de la valeur de E 1, et des autres relations connues ; mais voici un moyen direct d'y parvenir.

(53). On peut déduire des valeurs de A et B développées dans l'art. 49, ces deux équations $B = A - 2\left(\frac{1 - c^2}{c}\right)\frac{dA}{dc}$, $c(1 - c^2)\frac{dA}{dc} = \int A\, c\, dc$. La première fait voir comment B se déduit de A ; l'autre étant différentiée donne,

$$(1 - c^2)\frac{ddA}{dc^2} + \frac{1 - 3c^2}{c} \cdot \frac{dA}{dc} - A = 0 \ldots\ldots (\gamma)$$

Comme nous voulons développer A suivant les puissances de b, il faut substituer dans cette équation $\sqrt{(1-b^2)}$ au lieu de c, et elle deviendra,

$$(1-b^2)\frac{d\,d\,A}{d\,b^2}+\frac{1-3b^2}{b}\frac{d\,A}{d\,b}-A=0 \quad \ldots (\tilde{c}).$$

Il arrive donc, ce qui est fort remarquable, que l'équation est absolument de la même forme par rapport à b ou par à c; d'où nous concluerons qu'on satisfait à l'équation ($\tilde{c}$), en mettant au lieu de A la valeur $A'=1+\frac{1}{4}b^2+\frac{1\cdot 9}{4\cdot 16}b^4+$ etc. Cette valeur A' n'est pas celle que nous cherchons (puisqu'elle répond au complément du module), mais elle y conduira. Soit $A=A'p$, la substitution dans l'équation ($\tilde{c}$) donnera, après les réductions ordinaires, $p=\alpha\int\frac{d\,b}{b(1-b^2)A'^2}$. Développant cette valeur en série, et déterminant la constante α par la valeur connue de E 1, on aura

$$\frac{\pi}{2}A=A'\left[\log.\frac{4}{b}-\frac{1}{4}b^2-\frac{13}{128}b^4-\frac{23}{384}b^6-\text{etc.}\right] \quad \ldots (\varepsilon)$$

Formule très-convergente lorsque b est très-petit, et qu'il conviendra d'employer lorsque c sera au-dessus de sin. 80°, ou b au-dessous de sin. 10°. Dans la construction d'une table, on a cet avantage, que A' est déja calculé pour un petit angle, lorsqu'on calcule A pour son complément. Il n'est pas nécessaire, pour l'objet de ces approximations, de continuer plus loin la suite (ε), cependant la forme de l'expression étant connue, on trouveroit facilement, d'après l'équation (γ), cette loi :

$$\frac{\pi}{2}A=\log.\frac{4}{b}+\frac{1}{4}b^2\left(\log.\frac{4}{b}-1\right)+\frac{1\cdot 9}{4\cdot 16}b^4\left(\log.\frac{4}{b}-1-\frac{1}{2\cdot 3}\right)$$
$$+\frac{1\cdot 9\cdot 25}{4\cdot 16\cdot 36}b^6\left(\log.\frac{4}{b}-1-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 5}\right)+\text{etc.} \quad \ldots (\zeta)$$

où il faut observer que les fractions $\frac{1}{2.3}$, $\frac{1}{3.5}$, seront suivies de $\frac{1}{4.7}$, $\frac{1}{5.9}$, etc. Connoissant A on aura B, soit par la formule

$$\frac{\pi}{2} B = (A' + 2b\frac{dA'}{db})\left(\log.\frac{4}{b} - \frac{1}{4}b' - \frac{13}{128}b' - \text{etc.}\right) - \frac{2}{(1-b')A'} \quad (\eta)$$

(dans laquelle, à la place de $A' + 2b\frac{dA'}{db}$, on peut mettre $\frac{A' - B'b'}{1-b'}$, ou sa valeur développée $1 + \frac{1}{4}.5\,b' + \frac{1.9}{4.16}9b'$ etc.), soit par la suite

$$\frac{\pi}{2} B = -2A' + \log.\frac{4}{b} + \frac{1}{4}.5\,b'\left(\log.\frac{4}{b} - 1\right) + \frac{1.9}{4.16}9\left(\log.\frac{4}{b} - 1 - \frac{1}{2.3}\right) + \text{etc.}$$

Les autres coëfficiens C, D, etc. se calculeront par les équations (6), dont l'usage est sûr et commode dans le cas dont il s'agit. On voit au reste que la combinaison des équations (η) et (ε), meneroit directement à l'équation $\frac{4}{\pi A A'} = 1 - \frac{B}{A}c^2 - \frac{B'}{A'}b^2$, qui est le théorême de l'art. 37.

Enfin, pour parvenir à une relation d'un autre genre, si on considère la suite des fonctions F 1, qui répondent à la suite des modules ..... c'', c', c, c^0, c^{00}, ... dont le moyen $c = \sin. 45^0$, on verra aisément que les fonctions F' et F^0 ont des modules complémens l'un de l'autre, ainsi que F'' et F^{00}, etc. On aura de plus $F' = 2F^0$, $F'' = 4F^{00}$, etc. De là et des formules précédentes, il suit que π est égal à la limite des quantités $\log.\frac{4}{c^0}$, $\frac{1}{2}\log.\frac{4}{c^{00}}$, $\frac{1}{4}\log.\frac{4}{c^{000}}$, etc., et dès le 6e terme cette approximation équivaut à cent décimales au moins.

De la surface du cône oblique.

(54). Soit le rayon de la base $= 1$, la hauteur du cône $= f$, la distance entre le centre de la base et le pied de la perpen-

diculaire $= g$, l'angle au centre entre la ligne g, et un rayon quelconque $= \omega$, la partie de la surface du cône qui répond à l'angle ω sera,

$$C = \int \tfrac{1}{2} d\omega \sqrt{[f^2 + (1 - g\cos.\omega)^2]}.$$

Pour réduire cette intégrale à la forme ordinaire, faisons, $\cos.\omega = \frac{m + \cos.\phi}{1 + m\cos.\phi}$, ou $\text{tang.}\frac{1}{2}\omega = \sqrt{\left(\frac{1-m}{1+m}\right)}\,\text{tang.}\frac{1}{2}\phi$, et prenons l'indéterminée m, de manière que $f^2 m + (1 - mg)(m - g) = 0$, ce qui donne

$$m = \frac{1 + f^2 + g^2}{2g} - \sqrt{\left[\left(\frac{1 + f^2 + g^2}{2g}\right)^2 - 1\right]},$$

faisons de plus, $c^2 = \frac{(g-m)^2}{f^2 + (g-m)^2}$, nous aurons la transformée,

$$C = \tfrac{1}{2}(1 - m^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{g}{m}\right)} \int \frac{d\phi \sqrt{(1 - c^2 \sin.^2\phi)}}{(1 + m\cos.\phi)^2},$$

formule où m est plus petite que l'unité, comme il est nécessaire pour que ϕ soit réel, et où on peut remarquer que $\sqrt{\left(\frac{g}{m}\right)}$ est la moyenne arithmétique entre la plus grande et la plus petite distance du sommet à la circonférence de la base.

Si on fait maintenant pour abréger, $C = \frac{1}{2}(1 - m^2)^{\frac{1}{2}} Z \sqrt{\frac{g}{m}}$, on aura

$$Z = \frac{-m\Delta \sin.\phi}{1 + m\cos.\phi} - \int \frac{m\, d\phi \cos.\phi}{(1 - m^2\cos.^2\phi)\Delta} + \int \frac{d\phi}{(1 - m^2\cos.^2\phi)\Delta} - \int \frac{c^2 \sin.^2\phi\, d\phi}{\Delta}.$$

De ces trois intégrales, la première se réduit à un arc de cercle ; car, soit $\text{tang}\,\xi = \frac{c \sin.\phi}{\Delta \sqrt{\left(1 - \frac{m}{g}\right)}}$, l'intégrale sera $\frac{\xi}{\sqrt{(1-m^2)} \cdot \sqrt{\frac{g}{m}}}$. Si on fait ensuite, $\frac{m^2}{1-m^2} = n$, quantité

positive, les deux autres intégrales pourront se mettre sous la forme,

$$\int \frac{n - n \sin.^2 \varphi}{1 + n \sin.^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta} + \int \Delta \, d\varphi.$$

Soit donc comme à l'ordinaire, $E = \int \Delta \, d\varphi$, $H = \int \frac{n - n \sin.^2 \varphi}{1 + n \sin^2 \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta}$, et on aura,

$$Z = \frac{-m \Delta \sin. \varphi}{1 + m \cos. \varphi} - \frac{E \sqrt{m}}{\sqrt{(1 - m^2)} \cdot \sqrt{g}} + E + H.$$

Dans le cas du cône entier, on aura simplement $Z = 4E1 + 4H1$.

La quantité H est une fonction elliptique de la troisième espèce, qui ne peut se ramener en général aux fonctions de la seconde ; ainsi la surface du cône oblique est une transcendante supérieure aux arcs d'ellipse ; mais elle est comprise dans les transcendantes elliptiques, et elle jouit par conséquent de leurs propriétés, c'est-à-dire, qu'on peut comparer une infinité de portions de cette surface, de manière que leurs différences combinées soient déterminables par des arcs de cercle ; car à cause de n positif, les logarithmes n'entrent pas dans ces comparaisons.

On peut assigner une infinité de cônes obliques dont la surface soit déterminable par arcs d'ellipse : il faut pour cela que n soit égal à l'une des fonctions de c, au moyen desquelles nous avons trouvé que la fonction II peut s'abaisser à un degré inférieur. La valeur de n devant être positive, le cas le plus simple est celui de $n = c$, qui donneroit $g = \sqrt{(c + c^2)}$, $f = \sqrt{(c - c^2)}$; de sorte que si on a entre les lignes, f, g, et le rayon de la base 1 ou r, l'équation

$$(f^2 + g^2)^2 = 2 r^2 (g^2 - f^2),$$

la surface partielle ou totale du cône pourra se déterminer

par les arcs d'ellipse ; on trouve par exemple que la surface totale $= \frac{\pi}{2} + 2\,E\,1 - (1-c)\,F\,1$.

Le développement de la surface du cône oblique sur un plan, produit un secteur dont l'angle se détermine par la formule

$$\Sigma = \int \frac{d\omega \sqrt{[f^2 + (1 - g\cos.\omega)^2]}}{1 + f^2 + g^2 - 2g\cos.\omega},$$

ou par sa transformée

$$\Sigma = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)}.(1 - m^2)^{\frac{1}{2}} \int \frac{\Delta\, d\phi}{1 + n\sin.^2\phi}.$$

Cette quantité dépend donc toujours des mêmes transcendantes ; mais elle est un peu plus simple, parce qu'elle ne renferme qu'un seul terme qui se rapporte aux fonctions elliptiques de la troisième espèce. Dans le cas particulier dont nous avons fait mention, l'angle total du secteur seroit $\pi + 2\,(1-c)\,F\,1$.

De quelques formules générales qui peuvent se ramener aux fonctions elliptiques.

(54). La nature des transcendantes elliptiques étant connue et approfondie, il importe de ramener à ces quantités le plus grand nombre de formules intégrales qu'il sera possible. Comme la multitude en est infinie et aussi variée que les substitutions qu'on peut mettre en usage, nous nous contenterons d'indiquer quelques cas où cette réduction a lieu.

1°. *On peut réduire aux fonctions elliptiques l'intégrale* $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)}}$, *dans laquelle* P *est une fonction rationnelle de* x.

Car si on fait $x^2 = z$, on pourra supposer $P = M + N\sqrt{z}$,

M et N étant des fonctions rationnelles de z, et l'intégrale proposée deviendra,

$$\int \frac{\frac{1}{2}M\,dz}{\sqrt{(\alpha z+6z^2+\gamma z^3+\delta z^4)}}+\int \frac{\frac{1}{2}N\,dz}{\sqrt{(\alpha+6z+\gamma z^2+\delta z^3)}},$$

dont les deux parties sont comprises dans les formules elliptiques.

2°. *Toute formule* $\int \frac{P\,dx}{\sqrt[4]{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)}}$ *dans laquelle* P *est une fonction rationnelle de* x, *peut se ramener aux fonctions elliptiques.*

Car on peut toujours faire $P = M + N\,x$, M et N étant des fonctions rationelles paires de x. Considérons la partie

$$\frac{N\,x\,dx}{\sqrt[4]{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)}},$$

et faisons $\sqrt[4]{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)} = z$, ce qui donne

$$x^2 = \frac{-6+\sqrt{(6^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^4)}}{2\gamma},$$

il est clair que par la substitution de la valeur de x^2, $N\,x\,dx$ ne contiendra d'autre radical que $\sqrt{(6^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^4)}$; donc toute la difficulté se réduira à intégrer une quantité de la forme

$$\frac{Q\,z^2\,dz}{\sqrt{(6^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^4)}},$$

dans laquelle Q est une fonction rationelle de z^4. Quant à la partie

$$\frac{M\,dx}{\sqrt[4]{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)}},$$

si on fait $\sqrt[4]{(\alpha+6x^2+\gamma x^4)} = xy$, on aura

$$x^2 = \frac{-6+\sqrt{(6^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4)}}{2(\gamma-y^4)},$$

$$\frac{dx}{xy} = \frac{2x^2y^2\,dy}{\sqrt{(6^2-4\alpha\gamma+4\alpha y^4)}},$$

d'où l'on voit que la transformée en y contiendra encore une partie entièrement rationelle, et une de la forme

$$\frac{R\,x^r\,dx}{\sqrt{(\alpha-4\alpha\gamma+4\gamma\beta)}},$$

R étant une fonction rationelle de x^4. Donc la formule proposée est toujours reductible aux fonctions elliptiques.

3°. *On resoudroit absolument de la même manière la formule* $\int P\,dx\sqrt[4]{(\alpha+6x^3+\gamma x^4)}$, P *étant une fonction rationelle de* x.

Ces deux cas comprennent la formule $\int P\,dx\,(\alpha+6x^3+\gamma x^4)^{\pm\frac{1}{2}}$, et aussi la formule $\int Q\,dy\,(\alpha+6y+\gamma y^2)^{\pm\frac{1}{2}}$, où Q est une fonction rationelle de y; car en faisant $y=x^2$, cette dernière retombe dans les deux autres.

4°. *On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule* $\int P\,dx\,(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3)^{\pm\frac{1}{2}}$, P *étant une fonction rationelle de* x.

Cette réduction peut se faire de plusieurs manières; d'abord on peut faire l'une ou l'autre des suppositions

$$\sqrt[3]{(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3)}=\sqrt[3]{\alpha}+xz,$$
$$\sqrt[3]{(\alpha+6x+\gamma x^2+\delta x^3)}=x\sqrt[3]{\delta}+z,$$

et les transformées en z seront comprises dans les fonctions elliptiques. On peut aussi faire disparoître à volonté le coëfficient α ou le coëfficient δ sous le radical; il faut faire pour cela $x=m+y$, ou $x=m+\frac{1}{y}$, et prendre pour m une racine réelle de l'équation $\alpha+6m+\gamma m^2+\delta m^3=0$. Supposons qu'on a fait disparoître de cette manière δ, alors on fera $\sqrt[3]{(\alpha+6x+\gamma x^2)}=z$, ce qui donne

$$x=\frac{-6+\sqrt{(6^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^3)}}{2\gamma},$$

et en substituant cette valeur dans la formule proposée, toute

toute la difficulté se réduira à intégrer une différentielle de de la forme $\frac{Q\,dz}{\sqrt{(\varepsilon^2-4\alpha\gamma+4\gamma z^3)}}$, Q étant une fonction rationelle de z.

5°. *On peut réduire aux fonctions elliptiques la formule* $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{[\alpha+\varepsilon x+\gamma x^2+\delta x^3+\gamma x^4+\varepsilon x^5+\alpha x^6]}}$, P *étant une fonction rationelle de* x.

Car si on fait $x^2+1=xz$, cette formule deviendra d'abord

$$\int \frac{P x^{-3} dx}{\sqrt{[\alpha(z^3-3z)+\varepsilon(z^2-2)+\gamma z+\delta]}},$$

ensuite la valeur de x, qui est $\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}\sqrt{(z^2-4)}$, étant substituée dans P, il est clair que le résultat sera de la forme $M \pm N\sqrt{(z^2-4)}$, M et N étant des fonctions rationelles de z. De plus, on a $x+1=x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z+2)}$, $x-1=\pm x^{\frac{1}{2}}\sqrt{(z-2)}$; de là résulte $2x^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{(z+2)} \mp \sqrt{(z-2)}$, et

$$x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z+2)}} \mp \frac{\frac{1}{2}dz}{\sqrt{(z-2)}},$$

donc la transformée en z aura tous ses termes intégrables par les fonctions elliptiques.

6°. *Enfin on peut intégrer de même la formule* $\int \frac{P\,dy}{\sqrt{(\varepsilon^2+\gamma y^2+\delta y^3+\gamma y^4+\varepsilon y^5)}}$, P *étant une fonction rationelle de* y.

Car si on fait $P=M+Ny$, M et N étant des fonctions paires de y, et qu'on appelle le radical R, la partie $\frac{M\,dy}{R}$ rentrera dans le cas précédent, en faisant $\alpha=0$ et $y^2=x$. L'autre partie $\frac{N\,y\,dy}{R}$ se réduit pareillement à une fonction elliptique, en faisant $y^2=x$.

EXEMPLE.

(56.) Soit proposé d'intégrer la différentielle

$$d\Pi = \frac{dx}{(3-xx)\sqrt[3]{(1-3xx)}}.$$

On fera $\sqrt[3]{(1-3xx)} = 1 - \frac{x}{z}$, ce qui donne $x = \frac{3z}{2}(1+zz) - \frac{3z}{2}\sqrt{(z^4+2z^3-\frac{1}{3})}$, et la transformée sera

$$d\Pi = \frac{\frac{2}{3}(1-z^2)dz}{(1+z^2)(3z^2-1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{3z^4+1}{3z^4+2z^2-1}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(3z^4+6z^2-1)}}.$$

La première partie est rationelle ; la seconde semble devoir se décomposer en deux fonctions elliptiques de la troisième espèce, à cause des deux facteurs du dénominateur $3z^4+2z^2-1$. Mais en examinant la chose avec plus d'attention, on trouve qu'en faisant $\sqrt{(3z^4+6z^2-1)} = pz$, la seconde partie de la valeur de $d\Pi$ devient $-\frac{1}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{dp}{p^2-4}$. Ainsi la différentielle proposée peut être intégrée absolument sans fonctions elliptiques, et elle se réduit à l'expression rationelle,

$$d\Pi = \frac{\frac{2}{3}(1-z^2)dz}{(1+z^2)(3z^2-1)} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{dp}{p^2-4}.$$

Une pareille simplification aura lieu en général pour la formule

$$\int \frac{(\gamma z^4-\alpha)dz}{(\gamma z^4+\beta z^2+\alpha)\sqrt{(\alpha+\beta z^2+\gamma z^4)}};$$

car si on fait le radical $= pz$, cette formule deviendra $\int \frac{dp}{p^2-\beta+4}$; réduction assez remarquable et analogue à celle des articles 38 et 39.

Des transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, *qu'on suppose intégrée depuis* $x=0$ *jusqu'à* $x=1$.

(57). Euler a considéré ces transcendantes dans le chap. IX, tome I de son *Calcul intégral*, et il en a démontré un grand nombre de belles propriétés. Désignons avec cet auteur la formule dont il s'agit par le caractère $\left[\frac{p}{q}\right]$, ce qui est commode pour comparer diverses formules de ce genre, dans lesquelles n est le même; nous aurons d'abord $\left[\frac{p}{q}\right]=\left[\frac{q}{p}\right]$, Equation (1)
première propriété, qui fait voir que les nombres p et q peuvent s'échanger l'un dans l'autre. On a ensuite $\left[\frac{p+n}{q}\right]=$ (2)
$\frac{p}{p+q}\cdot\left[\frac{p}{q}\right]$, d'où il suit que les formules $\left[\frac{p}{q}\right]$ peuvent toujours se réduire à des formules de la même nature, dans lesquelles p et q ne surpassent pas n; ainsi on pourra toujours supposer que p et q ne surpassent pas n. Dans le cas de $q=n$, on a exactement $\left[\frac{n}{q}\right]=\frac{1}{q}$, et dans le cas de $p+q$ (3)
$=n$, l'intégrale $\left[\frac{p}{q}\right]$ ne dépend que du cercle, et on a généralement

$$\left[\frac{n-a}{a}\right]=\left[\frac{a}{n-a}\right]=\frac{\pi}{n\sin.\frac{a\pi}{n}}. \qquad (4)$$

Ces deux cas sont les seuls où l'on puisse déterminer exactement la fonction $\left[\frac{p}{q}\right]$; tous les autres offrent autant de transcendantes supérieures aux arcs de cercle, et il s'agit de réduire ces transcendantes, pour chaque valeur de n, au moindre nombre possible. On a pour cet effet l'équation générale $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{r}\right]=\left[\frac{p}{r}\right]\left[\frac{p+r}{q}\right]$, qui a lieu quels que (5)

soient p, q, r, et qui en fournit plusieurs autres, attendu qu'on peut renverser chaque expression. Par le moyen de cette équation, on peut, pour chaque valeur de n, former un tableau de toutes les valeurs de $\left[\frac{p}{q}\right]$, où il ne restera à déterminer que les transcendantes $\left[\frac{n-2}{1}\right]$, $\left[\frac{n-3}{2}\right]$, $\left[\frac{n-4}{3}\right]$, etc. dont le nombre est $\frac{n}{2}-1$, si n est pair, et $\frac{n-1}{2}$, s'il est impair. Nous renvoyons pour les démonstrations à l'ouvrage d'Euler. Voici maintenant quelques autres résultats sur le même objet.

(58). Suivant l'équation (5) on a $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{n-p-q}\right] = \left[\frac{p}{n-p-q}\right]\left[\frac{n-q}{q}\right]$, et $\left[\frac{p}{n-p-q}\right]\left[\frac{n-q}{n-p}\right] = \left[\frac{p}{n-p}\right]\left[\frac{n}{n-p-q}\right]$. Multipliant ces deux équations, et mettant les valeurs connues par les formules (3) et (4), on aura

$$(6)\qquad \left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{n-p}{n-q}\right] = \frac{\pi \sin.\,(p+q)\,\frac{\pi}{n}}{n(n-p-q)\sin.\frac{p\pi}{n}\sin.\frac{q\pi}{n}},$$

d'où il suit que la formule $\left[\frac{n-p}{n-q}\right]$ peut toujours se déterminer par la formule $\left[\frac{p}{q}\right]$, qui en est en quelque sorte le complément. On a en particulier

$$(7)\qquad \left[\frac{a}{a}\right]\left[\frac{n-a}{n-a}\right] = \frac{2\pi \cot.\frac{a\pi}{n}}{n(n-2a)}$$

$$(8)\qquad \left[\frac{n-2a}{a}\right]\left[\frac{2a}{n-a}\right] = \frac{\pi}{na\sin.\frac{2a\pi}{n}}.$$

L'équation (5) donne encore $\left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{n-p}\right] = \left[\frac{p}{n-p}\right]\left[\frac{n}{q}\right]$ ou en mettant les valeurs connues

$$(9)\qquad \left[\frac{p}{q}\right]\left[\frac{p+q}{n-p}\right] = \frac{\pi}{qn\sin.\frac{p\pi}{n}}.$$

Il résulte de celle-ci

$$\left[\frac{a}{a}\right]\left[\frac{2a}{n-a}\right]=\frac{\pi}{an\sin.\frac{a\pi}{n}}. \qquad (10)$$

et combinant ce résultat avec l'équation (8), on aura :

$$\left[\frac{a}{a}\right]=\left[\frac{n-2a}{a}\right].\ 2\cos.\frac{a\pi}{n}. \qquad (11)$$

D'où l'on voit que les formules $\left[\frac{n-a}{n-a}\right]$, $\left[\frac{n-2a}{a}\right]$, $\left[\frac{n-a}{2a}\right]$, peuvent se déduire immédiatement de $\left[\frac{a}{a}\right]$.

(59) Venons aux transformations par lesquelles on peut connoître plus précisément la nature de ces fonctions. La substitution $1-x^n=y^n$ conduit à l'équation (1); la substitution $1-x^n=x^n z^n$ donne une transformée rationnelle lorsque $p+q=n$, et il en résulte l'équation (4) : dans le cas où n est pair, et où l'on a $p+q=\frac{1}{2}n$, cette même substitution donne la formule

$$\left[\tfrac{1}{2}\frac{n-a}{a}\right]=\int\frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}, \qquad (12)$$

laquelle doit être intégrée depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$.

Pour obtenir d'autres résultats, supposons $1-x^n=\frac{z^n}{4z^n}$, ou $x^n=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(1-z^n)}$, on aura, dans le cas de $p=q=a$, la transformée $\pm 2^{-\frac{2a}{n}}\int\frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1-z^n)}}$; et par rapport aux limites, il faut observer que $x=0$ donne $z=0$, $x^n=\frac{1}{2}$ donne $z=1$, et $x=1$ donne $z=0$. D'où il suit que l'intégrale doit être prise deux fois depuis $z=0$, jusqu'à $z=1$. Ainsi, comme on peut mettre x à la place de z, on aura

$$\left[\frac{a}{a}\right]=2^{1-\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}. \qquad (13)$$

De-là on tirera les valeurs successives de $\left[\frac{1}{1}\right]$, $\left[\frac{2}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{3}\right]$, etc. sous une forme assez commode, et ces formules peuvent remplacer celles dont nous avons dit qu'Euler se sert pour exprimer toutes les valeurs de $\left[\frac{p}{q}\right]$. En effet, dans le tableau de toutes ces valeurs, formé à la manière d'Euler, on trouvera facilement que les formules $\left[\frac{n-2}{2}\right]$, $\left[\frac{n-3}{3}\right]$, etc. peuvent se déterminer par un égal nombre des formules $\left[\frac{1}{1}\right]$, $\left[\frac{2}{2}\right]$, $\left[\frac{3}{3}\right]$, etc. Or, celles-ci sont maintenant réduites à la forme la plus simple dont elles soient susceptibles.

Remarquons que les équations (7) et (13) combinées, donnent

$$(14)\qquad \int\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}\times\int\frac{x^{n-a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}=\frac{2\pi\cot.\frac{a\pi}{n}}{n(n-2a)}.$$

Si n étoit pair, et qu'on eut $p-q=\frac{1}{2}n$, la même substitution de $1-x^n=\frac{z^n}{4z^n}$, donneroit cette formule:

$$(15)\qquad \left[\frac{\frac{1}{2}n+a}{a}\right]=2^{-\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^{\frac{1}{2}n})}}=2^{1-\frac{2a}{n}}\int\frac{x^{2a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Et dans le même cas de n pair, on auroit directement, sans substitution,

$$(16)\qquad \left[\frac{a}{\frac{1}{2}n}\right]=\int\frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}}.$$

Supposons maintenant $1-x^n=\frac{1}{4}\,z^n\,x^{2n}$, ou $x^{-n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(1+z^n)}$, on trouvera, dans le cas de $p+2q=n$, cette nouvelle formule,

$$(17)\qquad \left[\frac{n-2a}{a}\right]=2^{-\frac{2a}{n}}\int\frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}},$$

qui doit être intégrée depuis $z=0$, jusqu'à $z=\infty$, et qui suppose $a < \frac{1}{2} n$. Cette formule n'est pas moins simple que la formule (13), et elle peut servir au même usage; car si on la combine avec l'équation (11), on en tire,

$$\left[\frac{\pi}{a}\right] = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos.\frac{a\pi}{n} \int \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}. \qquad (18)$$

Il faut donc qu'on ait généralement,

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos.\frac{a\pi}{n} \int \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}}; \qquad (19)$$

la première intégrale étant prise depuis $x=0$, jusqu'à $x=1$, et la seconde depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$. J'observe, à l'égard de cette équation, que si n est impair, et qu'on fasse $x=1-y^2$ dans le premier membre, et $z=y^2-1$ dans le second, l'un et l'autre se réduiront à la même formule; savoir :

$$\int \frac{(1-y^2)^{a-1}\,dy}{\sqrt{\left[n - \frac{n.n-1}{2} y^2 + \frac{n.n-1.n-2}{2.3} y^4 - \text{etc.}\right]}}.$$

Cette intégrale, dans le premier membre, est prise depuis $y=0$ jusqu'à $y=1$, et dans le second, depuis $y=1$ jusqu'à $y=\infty$. Donc ces deux parties sont entr'elles :: cos. $\frac{a\pi}{n}$: 1.

Au reste, quel que soit n pair ou impair, la formule (19) venant de la formule (17), suppose $a < \frac{1}{2} n$; car, d'ailleurs si on avoit $a =$, ou $> \frac{1}{2} n$, le second membre deviendroit infini; et pour que l'équation eût toujours lieu, il faudroit la mettre sous la forme

$$\int \frac{x^{a-1}\,dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cos.\frac{a\pi}{n} \cdot \int \left\{ \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} - z^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dz \right\}: \qquad (20)$$

ce qu'on trouveroit par la dernière substitution, en supposant $p + 2q = 2n$. De là résulte la manière d'évaluer

l'intégrale du second membre ; car, au moyen des équations (14) et (19), on trouve, a étant $> \frac{1}{2}n$,

$$(21)\quad \int \frac{z^{n-a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} \times \int \left\{ \frac{z^{a-1}\,dz}{\sqrt{(1+z^n)}} - z^{a-\frac{1}{2}n-1}\,dz \right\} = \frac{4\pi}{n(2a-n)\sin.\frac{2a\pi}{n}}.$$

(55). Lorsque n est impair, le nombre des transceudantes nécessaires pour déterminer toutes les formules $\left[\frac{p}{q}\right]$, ne sauroit se réduire au-dessous de $\frac{n-1}{2}$: lorsque n est pair, ce nombre peut se réduire à $\frac{n}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$.

En effet, par la combinaison des équations (12) et (18), on trouve,

$$(22)\quad \left[\frac{a}{a}\right] = 2^{1-\frac{2a}{n}} \cos.\frac{a\pi}{n}\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right]:$$

Or, la formule $\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{a}\right]$, qui est la même chose que $\left[\frac{a}{\frac{1}{2}n-a}\right]$, ne présente de valeurs différentes qu'un nombre $\frac{n}{4}$ ou $\frac{n-2}{4}$.

Cette dernière équation donne, en mettant $\frac{1}{2}n - a$ à la place de a,

$$\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right] = 2^{\frac{2a}{n}} \sin.\frac{a\pi}{n}\left[\frac{a}{\frac{1}{2}n-a}\right],$$

et ainsi on a directement

$$(23)\quad \left[\frac{a}{a}\right] = 2^{1-\frac{4a}{n}} \cot.\frac{a\pi}{n}\left[\frac{\frac{1}{2}n-a}{\frac{1}{2}n-a}\right],$$

d'où l'on voit qu'il suffit d'avoir les valeurs de $\left[\frac{a}{a}\right]$, dans les seuls cas où a ne surpasse pas $\frac{1}{4}n$.

Si

Si dans l'équation (12) on met $\frac{1}{2}n - a$ à la place de a, on aura

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}} = \int \frac{z^{\frac{1}{2}n-a-1}dz}{\sqrt{(1+z^n)}}, \tag{24}$$

équation qui d'ailleurs se vérifie immédiatement en mettant $\frac{1}{z}$ à la place de z, dans le premier membre : elle suppose toujours $a < \frac{1}{2}n$. De là et de l'équation (19), on tirera cette autre égalité, qui n'est pas aussi évidente.

$$\int \frac{x^{a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}} = \cot.\ \frac{a\pi}{n} \int \frac{x^{\frac{1}{2}n-a-1}dx}{\sqrt{(1-x^n)}}. \tag{25}$$

Ces résultats généraux vont répandre un grand jour sur les exemples particuliers. (*Voyez l'ouvrage cité d'Euler, article* 392 *et suivans*).

(60). *Exemple Ier.* Si $n = 3$, la seule transcendante requise est

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = 2^{-\frac{1}{3}} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}$$

et sa valeur, qu'on a déjà trouvée dans l'article 35, est

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = \frac{2\sqrt[3]{2}}{3\sqrt[4]{3}} \mathrm{F}\,1\,c = \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[4]{27}} \mathrm{F}\,1\,b,$$

le module c étant sin. 75°, ou b étant sin. 15°.

Exemple II. Si $n = 4$, il suffit de la transcendante

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}},$$

dont la valeur est $\mathrm{F}\,1\,c$, c étant $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ou sin. 45°.

Exemple III. Le cas de $n = 5$ offre les deux transcendantes

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = 2^{\frac{1}{5}} \cos.\ \tfrac{\pi}{5} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^5)}},$$

$$\left[\tfrac{2}{2}\right] = 2^{\frac{2}{5}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^5)}} = 2^{\frac{2}{5}} \cos.\ \tfrac{2\pi}{5} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^5)}};$$

mais elles ne paroissent pas réductibles aux fonctions elliptiques.

Exemple IV. Le cas de $n = 6$ offre la seule transcendante

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = 2^{\frac{1}{3}} \cos.\ \tfrac{\pi}{6} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^6)}}.$$

La première forme, en faisant $\frac{1}{x^3} = 1 + z^3$, donnera pour résultat $\left[\frac{1}{1}\right] = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{3}}$. F $1\,b$, le module b étant sin. 15°. La seconde forme, en faisant $\frac{1}{z^3} = y^3 - 1$; donneroit pour résultat $\left[\frac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{3}} \cos.\ \frac{\pi}{6}$ F $1\,c$, c étant sin. 75°. Ces deux résultats devant revenir au même, il faut donc qu'on ait F $1\,c = \sqrt{3}$ F $1\,b$, comme nous l'avons trouvé dans l'art. 36. La transcendante $\left[\frac{1}{1}\right]$ étant ainsi connue, on en peut déduire les deux dont Euler se sert pour déterminer toutes les autres; elles seront

$$\left[\tfrac{4}{1}\right] = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{1}\right],\quad \left[\tfrac{3}{2}\right] = \tfrac{2^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{1}\right].$$

Exemple V. Le cas de $n = 8$ offre les deux transcendantes

$$\left[\tfrac{1}{1}\right] = 2^{\frac{1}{4}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = 2^{\frac{1}{4}} \cos.\ \tfrac{\pi}{8} \int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}},$$

$$\left[\tfrac{2}{2}\right] = 2^{\frac{1}{2}} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = 2^{\frac{1}{2}} \cos.\ \tfrac{\pi}{4} \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^4)}}.$$

La seconde, en mettant x^2 à la place de x, devient $2^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}}$, et ainsi sa valeur est $\left[\frac{2}{2}\right] = \frac{1}{2} \mathrm{F}\,1\,(\frac{1}{\sqrt{2}})$. Pour évaluer la formule $\left[\frac{1}{1}\right]$ nous choisirons la seconde forme, et faisant $1+z^4 = pz^2$, ce qui donne $z = \frac{1}{2}\sqrt{(p+2)} \mp \frac{1}{2}\sqrt{(p-2)}$, nous aurons par la substitution

$$\frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}} = \frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p+2)}\cdot\sqrt{(p^2-4)}} \mp \frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p-2)}\cdot\sqrt{(p^2-4)}}.$$

Ces deux parties doivent être intégrées deux fois, depuis $p = 2$ jusqu'à $p = \infty$, et comme dans chaque intervalle elles sont de signes contraires, il suffira de prendre le double de la plus grande partie et d'intégrer $\frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p-2)}\cdot\sqrt{(p^2-4)}}$, depuis $p = 2$ jusqu'à $p = \infty$. Soit $p = 2 + q^2$, on aura donc,

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1+z^4)}} = \int \frac{dq}{\sqrt{(q^2+2-\sqrt{2})}\cdot\sqrt{(q^2+2+\sqrt{2})}},$$

les limites de q étant o et ∞. Faisons, pour abréger, $m = \sqrt{(2+\sqrt{2})} = 2\cos.\frac{\pi}{8}$, $q = m\cot.\phi$, $c^2 = 2\sqrt{2} - 2$, et la transformée sera $\frac{1}{m}\frac{d\phi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\phi)}}$, dont l'intégrale entre les limites requises, est $\frac{1}{m}\mathrm{F}\,1\,c$. On peut remarquer que le module c a pour complément $b = \sqrt{2}-1$, de sorte que la fonction elliptique qui se rencontre dans ce résultat, est celle que nous avons déja considérée dans l'art. 37, et qui a des propriétés particulières. On aura en conséquence

$$\left[\frac{1}{1}\right] = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\mathrm{F}\,1\,c = \sqrt[4]{2}\,\mathrm{F}\,1\,b\,(b = \sqrt{2}-1).$$

Si on fait maintenant $\left[\frac{1}{1}\right] = \mathrm{M}$, $\left[\frac{2}{2}\right] = \mathrm{N}$, on déduira de ces valeurs connues, celles des trois transcendantes qui sont

nécessaires dans la méthode d'Euler pour former le tableau des valeurs de $\left[\frac{p}{q}\right]$, et on aura

$$\left[\frac{6}{1}\right]=\frac{M}{2\cos.\frac{\pi}{8}},\ \left[\frac{5}{2}\right]=\frac{2^{-\frac{3}{4}}N}{\cos.\frac{\pi}{8}},\ \left[\frac{4}{3}\right]=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt[4]{8}}M.$$

Exemple VI. Le cas de $n=10$ dépend des deux seules transcendantes

$$\left[\frac{4}{1}\right]=\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{10})}},\ \left[\frac{3}{2}\right]=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^{10})}}.$$

Car, suivant l'équation (22), ces deux valeurs suffisent pour déterminer toutes celles de $\left[\frac{a}{a}\right]$. Or, $\left[\frac{4}{1}\right]$ ou $\left[\frac{1}{4}\right]$, est aussi représenté par $\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1+z^{10})}}$, et en mettant z^4 à la place de z, dans cette valeur, ainsi que dans celle de $\left[\frac{3}{2}\right]$, les deux transcendantes dont il s'agit seront,

$$\left[\frac{4}{1}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^5)}},\ \left[\frac{3}{2}\right]=\frac{1}{2}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^5)}}.$$

Elles sont les mêmes que dans le cas de $n=5$. En général le cas de $n=4m+2$ se ramenera toujours à celui de $n=2m+1$.

Exemple VII. Enfin nous examinerons le cas de $n=12$, comme donnant lieu à des réductions remarquables. Ce cas dépend des trois formules

$$\left[\frac{5}{1}\right]=\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}},\ \left[\frac{4}{2}\right]=\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(1+z^{12})}},\ \left[\frac{3}{3}\right]=\int\frac{z^2\,dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}.$$

La formule $\left[\frac{4}{3}\right]$ ou $\left[\frac{2}{4}\right]$ est aussi égale à $\int\frac{z^3\,dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$, et elle se réduit à $\frac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}$, en mettant z à la place de z^4. De même la formule $\left[\frac{5}{3}\right]$, en mettant z à la place de z^3, se

réduit à $\frac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}$; ces valeurs étant connues, on aura d'abord

$$\left[\tfrac{4}{3}\right]=\tfrac{1}{4}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}=\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\,\mathrm{F}\,1\,(c=\text{sin. }15^\circ)$$

$$\left[\tfrac{5}{3}\right]=\tfrac{1}{3}\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^3)}}=\tfrac{1}{3}\,\mathrm{F}\,1\,(c=\text{sin. }45^\circ).$$

Il reste à déterminer la formule $\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}$. Pour cela soit $1+z^4=pz^2$, la différentielle à intégrer deviendra,

$$\frac{\frac{1}{2}dp}{\sqrt{(p^2-3p)}}=\frac{\frac{1}{2}dp\sqrt{p}}{\sqrt{(p^2-3)}.\sqrt{(p^2-4)}}.$$

et on trouvera, comme ci-dessus, que tout se réduit à intégrer le double de la seconde partie, depuis $p=2$ jusqu'à $p=\infty$. Soit $p=q^2$, on aura donc

$$\int\frac{dz}{\sqrt{(1+z^{12})}}=\int\frac{q^2\,dq}{\sqrt{(q^6-7q^4+12)}}.$$

Si on fait maintenant $m^4=12$, et $q^4+m^2=q^2y$, ce qui donne $2q=\sqrt{(y+2m)}+\sqrt{(y-2m)}$, on aura pour transformée,

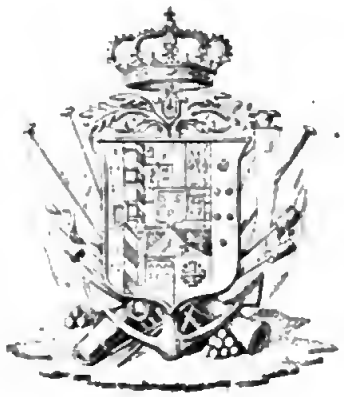
$$\int\frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(y+2m)}.\sqrt{(y^2-2my-7)}}+\int\frac{\frac{1}{2}dy}{\sqrt{(y-2m)}.\sqrt{(y^2-2my-7)}},$$

dont les deux parties doivent être intégrées depuis $y=2+\sqrt{3}$, ou $y^2=2m^2+7$, jusqu'à $y=\infty$. Soit $2+\sqrt{3}=n$, $y+2m=x^2$, la première partie deviendra

$$\int\frac{\frac{1}{2}dx}{\sqrt{(x^2-2m-n)}.\sqrt{(x^2-2m+n)}}.$$

Enfin, soit $x^2=\frac{2m+n}{\cos.^2\varphi}$ et $c^2=\frac{n-2m}{2n}$, ou $c=\frac{\sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{3}}{1+\sqrt{3}}$, et la dernière transformée sera $\frac{1}{2\sqrt{2n}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin.^2\varphi)}}$, dont la va-

REALE OFFICIO TOPOGRAFICO



N.° 5

V. Armadio

Scansia VIII.